ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Τόμος 2ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κωνσταντίνος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Θωμαΐδης Ιωάννης

• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός,

Κατσαργύρης Βασίλειος

Μέτης Στέφανος,

Μπρουχούτας Κων/νος

Πολύζος Γεώργιος

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

Αδαμόπουλος Λεωνίδας

• Επίτιμος Σύμβουλος του Π.Ι.

Δακτυλογράφηση: Γαρδέρη Ρόζα

Σχήματα: Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση
των προσαρμογών και
η επιστημονική επιμέλεια
του προσαρμοσμένου βιβλίου
πραγματοποιείται από τη Μονάδα
Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου
Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου
για μαθητές με μειωμένη όραση
από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
πραγματοποιείται με βάση τις
προδιαγραφές που έχουν
αναπτυχθεί από ειδικούς
εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Τόμος 2ος

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κων/νος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

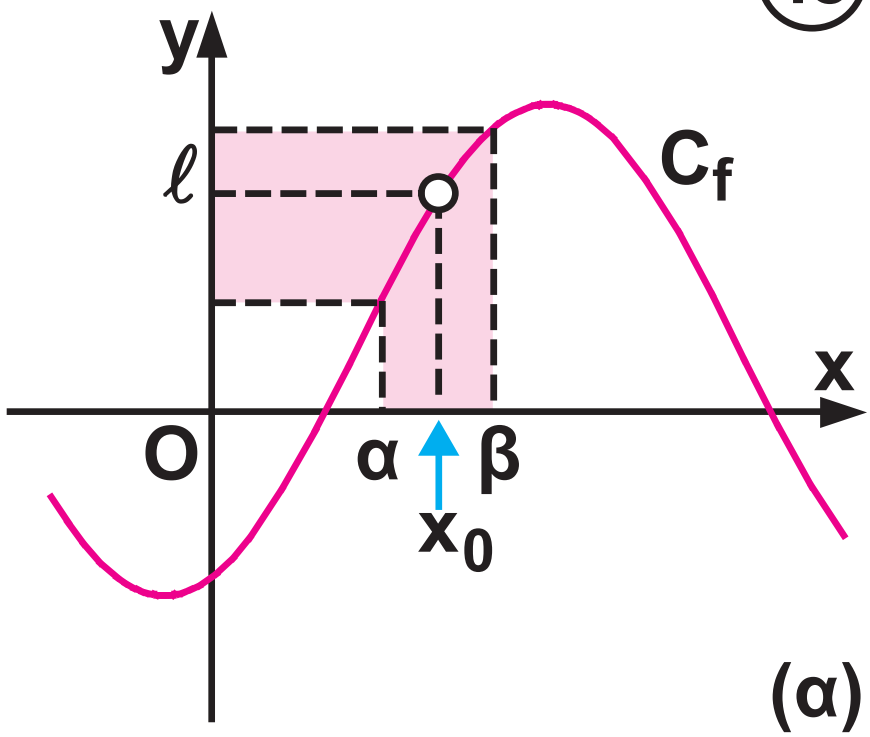
Όριο και διάταξη

Για το όριο και τη διάταξη αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

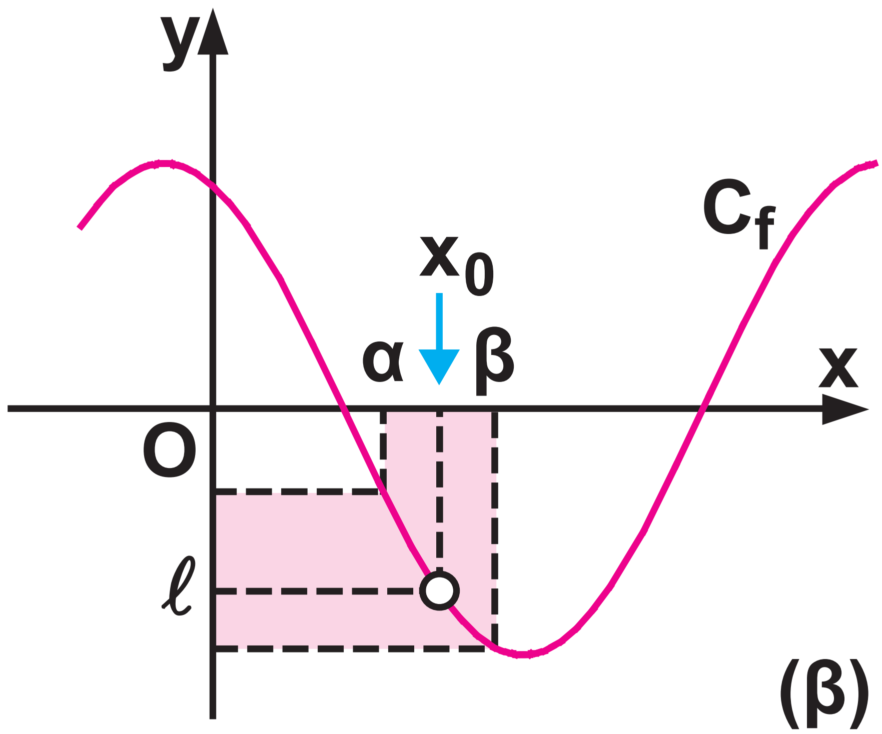
ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48α)
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48β)

⑱



(α)



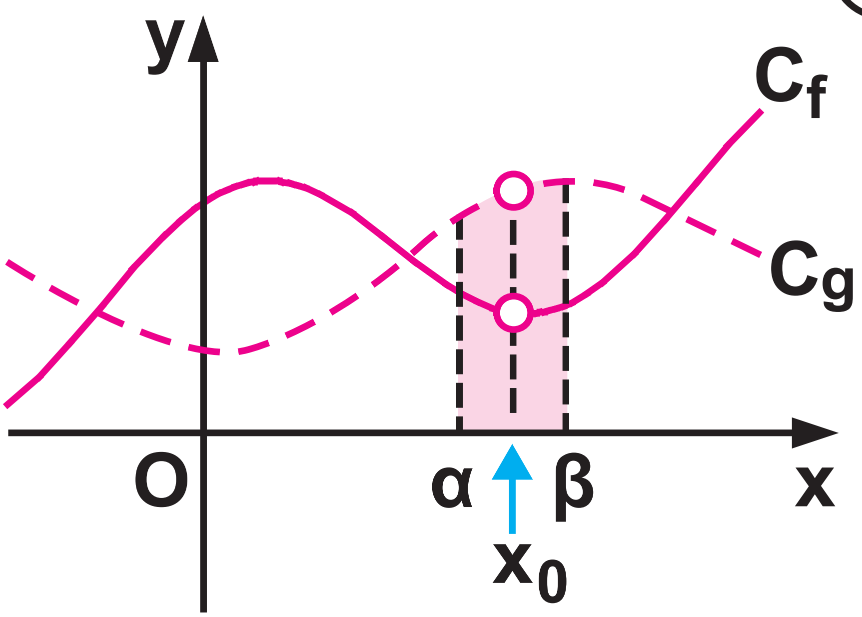
(β)

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

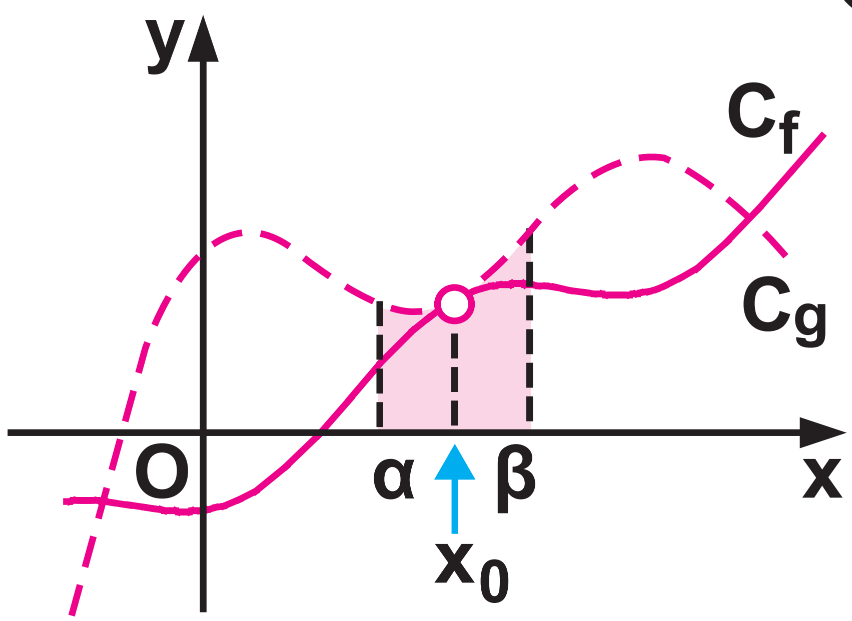
Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

49



(α)



(β)

Όρια και πράξεις

Τα δύο βασικά όρια $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, και το θεώρημα που ακολουθεί διευκολύνουν τον υπολογισμό των ορίων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

2. $$\lim_{x \to x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \to x_0} f(x),$$
   για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$

3. $$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$,

εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$

6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον

$f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0.

Οι ιδιότητες 1 και 3 του θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{\nu} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^{\nu}, \ \nu \in \mathbb{N}^*$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to x_0} x^{\nu} = x_0^{\nu}$$

— Έστω τώρα το πολυώνυμο

$P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} +$$

$$+ \cdots + \alpha_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) +$$

$$+ \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0 =$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x \to x_0} x^{\nu-1} +$$

$$+ \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0 =$$

$$= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)}$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 2}(x^3 - 6x^2 + 7x - 2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 +$$

$$+ 7 \cdot 2 - 2 = -4.$$

— Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου P(x), Q(x) πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} =$$

$$= \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)},\ \text{εφόσον}$$

$$Q(x_0)\neq 0$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2+2x+1}=\frac{2^2+4}{2^2+2\cdot 2+1}=\frac{8}{9}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν $Q(x_0)=0$, τότε δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα 4 του παραπάνω θεωρήματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 1 ii), που ακολουθεί.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}[(x^2+1)^9\cdot|x^3-1|]$

ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}[(x^2+1)^9\,|x^3-1|]=$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2+1)^9\cdot\lim_{x\to 0}|x^3-1|=$$

$$=[\lim_{x\to 0}(x^2+1)]^9 \cdot \left|\lim_{x\to 0}(x^3-1)\right| =$$

$$= 1^9 \cdot |-1| = 1.$$

ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου (ιδιότητα 4). Παρατηρούμε όμως ότι για $x=2$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος. Οπότε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$, για $x\neq 2$, γράφεται:

$$f(x)=\frac{x(x^2-5x+6)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{x(x-3)}{x+2}=\frac{x^2-3x}{x+2}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x}{x+2} = \frac{4-3\cdot 2}{2+2} = -\frac{1}{2}.$$

iii) Για $x=1$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{x^2+3}+2x$ και έτσι έχουμε:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)} =$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(2x)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=$$

$$=\frac{-3x^2+3}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=$$

$$=\frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to1}(-3(x+1))}{\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)} = \frac{-6}{\sqrt{4}+2} = -\frac{3}{2}.$$

2. **Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο στο $x_0=1$ της συνάρτησης**

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2-4, & x<1 \\ -\dfrac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases}.$$

ΛΥΣΗ

Αν $x < 1$, τότε $f(x)=3x^2-4$, οπότε

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1}(3x^2-4) = 3\cdot1^2-4=-1$$

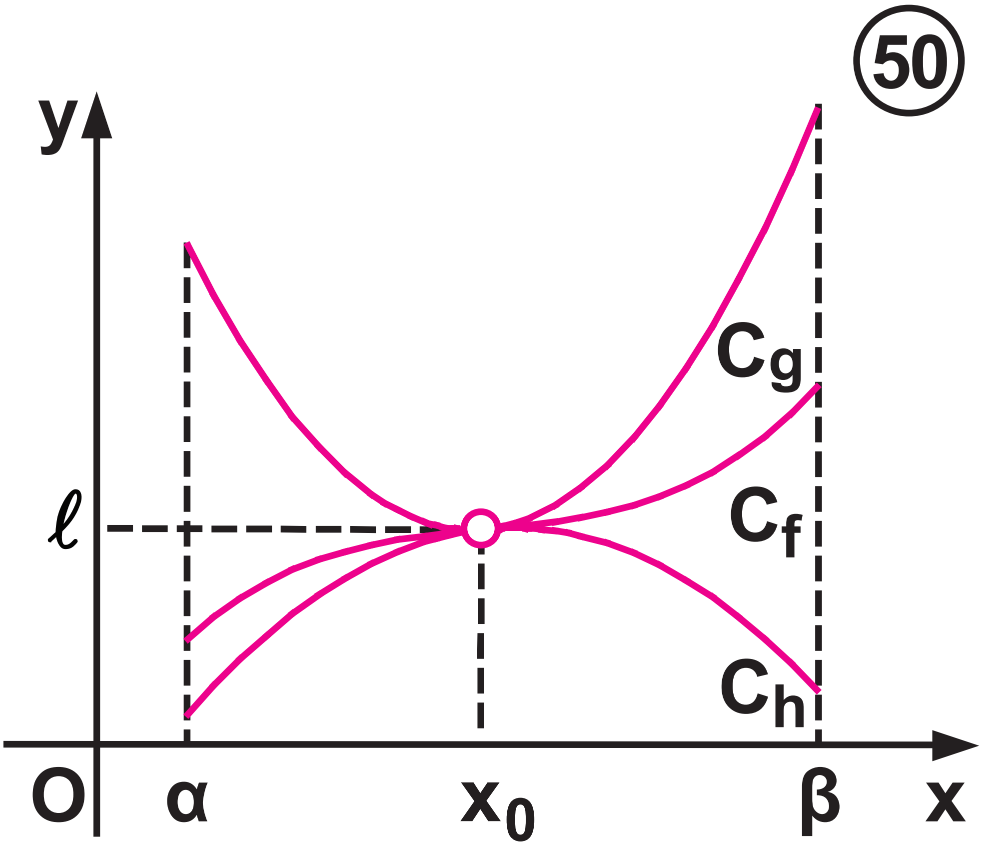
Αν $x > 1$, τότε $f(x)=-\dfrac{1}{x}$, οπότε

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$$

Επομένως $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1.$

Κριτήριο παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι "κοντά στο x_0" μια συνάρτηση f "εγκλωβίζεται" (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g. Αν, καθώς το x τείνει στο x_0, οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ. Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως κριτήριο παρεμβολής.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

Πράγματι, για $x\neq 0$ έχουμε

$$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x|,$$

οπότε

$$-|x|\leq x\eta\mu\frac{1}{x}\leq|x|.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0.$$

Τριγωνομετρικά όρια

Το κριτήριο παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό

ορισμένων τριγωνομετρικών ορίων. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι:

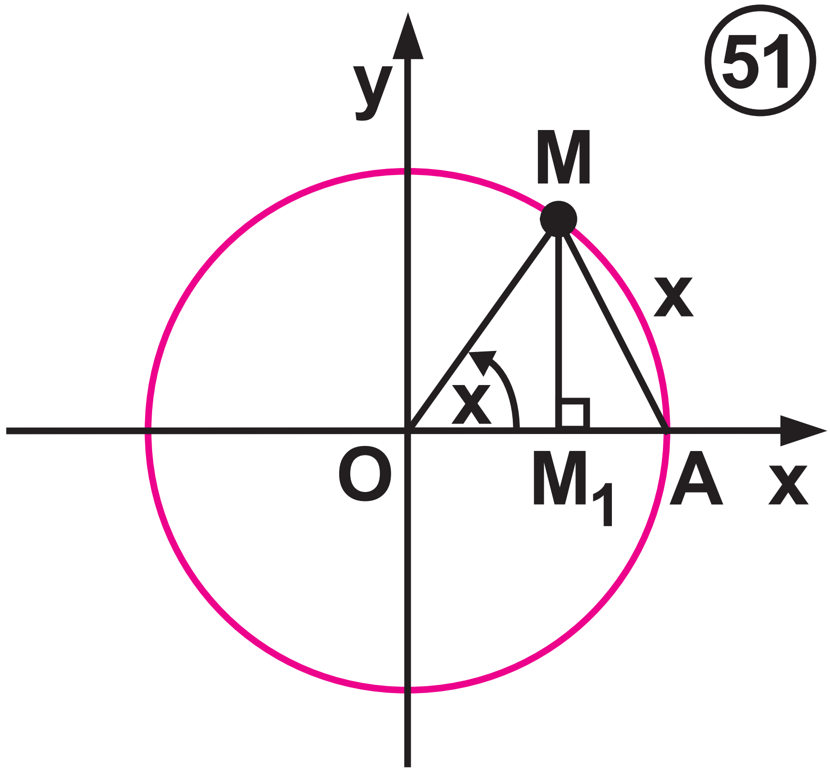
$|\eta\mu x| \le |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
(η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

— Για $x = 0$ προφανώς ισχύει η ισότητα.

— Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ από το παρακάτω σχήμα έχουμε

$$\eta\mu x = (MM_1) < (MA) < (\tau o\xi MA) = x.$$



Άρα

$|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (1)

— Για $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι $-x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

οπότε λόγω της (1) έχουμε,

$|\eta\mu(-x)| < |-x|$ ή, ισοδύναμα,

$|\eta\mu x| < |x|$.

— Για $x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $|x| \geq \frac{\pi}{2} >$ $> 1 \geq |ημx|$, οπότε $|ημx| < |x|$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις ισχύει $|ημx| \leq |x|$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. ■

Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας και του κριτηρίου παρεμβολής θα αποδείξουμε ότι:

1.

- $\lim\limits_{x \to x_0} ημx = ημx_0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} συνx = συνx_0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} ημx = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0} συνx = 1 \qquad (1)$$

Πράγματι:

— Σύμφωνα με την προηγούμενη ανισότητα έχουμε $|ημx| \le |x|$, οπότε

$$-|x| \le ημx \le |x|.$$

Επειδή $\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0 = \lim_{x\to 0}|x|$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα είναι

$$\lim_{x\to 0} ημx = 0.$$

— Γνωρίζουμε ότι $συν^2x = 1 - ημ^2x$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{1-\eta\mu^2 x}\text{, για κάθε}$$

$$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x=\lim_{x\to 0}\sqrt{1-\eta\mu^2 x}=$$

$$=\sqrt{1-\lim_{x\to 0}\eta\mu^2 x}=\sqrt{1-0}=1.$$

● Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$. Πράγματι έχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\eta\mu x=\lim_{h\to 0}\eta\mu(x_0+h)=$$

$$=\lim_{h\to 0}(\eta\mu x_0\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x_0\eta\mu h)=$$

$$= \eta\mu x_0 \lim_{h\to 0} \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x_0 \lim_{h\to 0} \eta\mu h =$$

$$\overset{(1)}{=} \eta\mu x_0 \cdot 1 + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot 0 = \eta\mu x_0.$$

• Ανάλογα αποδεικνύεται και ότι

$$\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0. \quad ■$$

2.

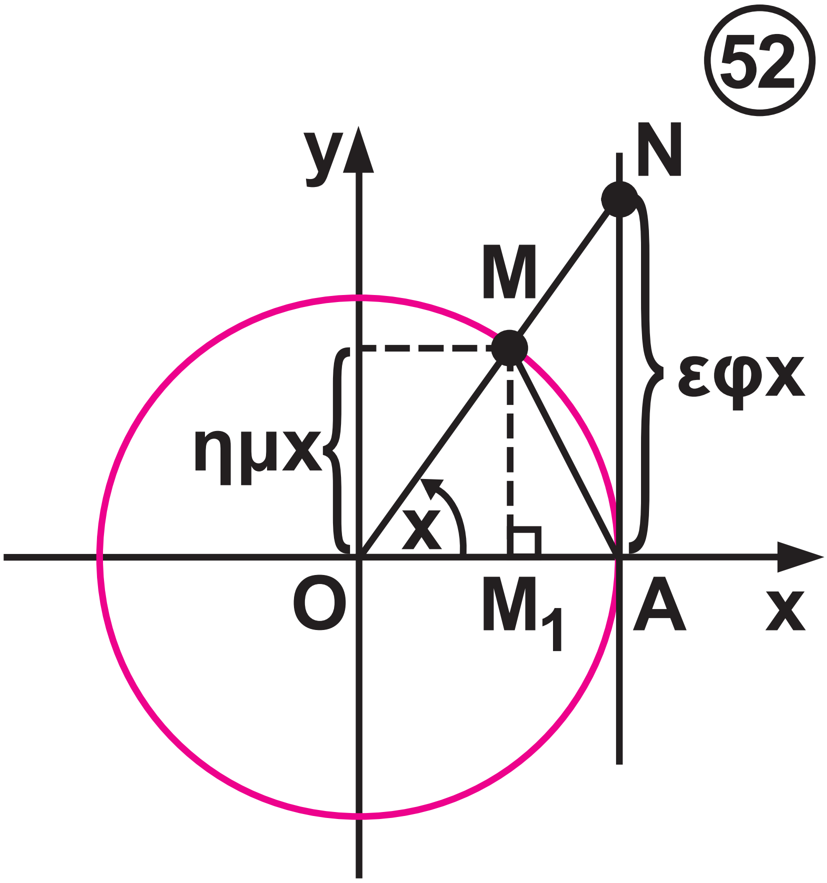
• α) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

• β) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

— Αν $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, τότε από το παρα-
κάτω σχήμα προκύπτει ότι

εμβ(τριγ OAM) < εμβ(τομ OAM) < < εμβ(τριγ OAN), οπότε έχουμε διαδοχικά:



$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \eta\mu x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \varepsilon\varphi x$$

$$\eta\mu x \ < \ x \ < \ \varepsilon\varphi x$$

$$1 < \frac{x}{\eta\mu x} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1.$$

— Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, τότε $0 < -x < \frac{\pi}{2}$,

οπότε έχουμε $\sigma\upsilon\nu(-x) < \frac{\eta\mu(-x)}{-x} < 1$

και άρα

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1.$$

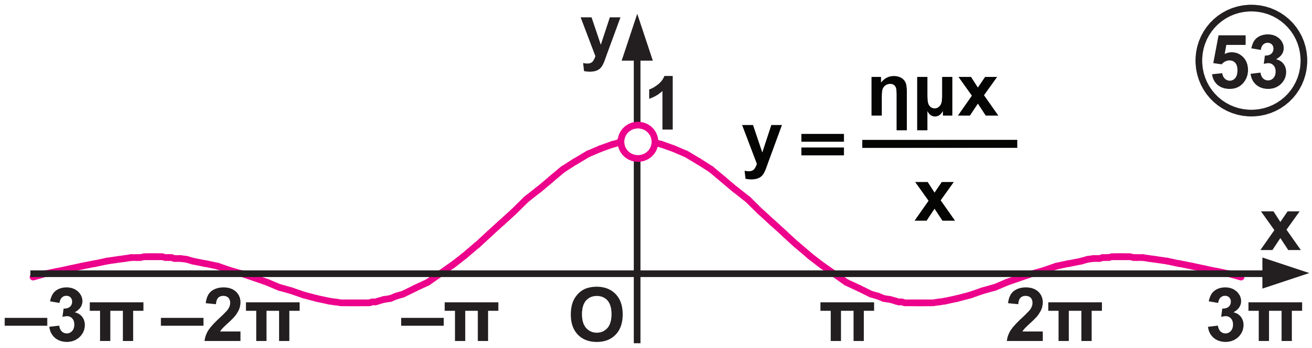
Επομένως, για κάθε

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1.$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1.$



β) Έχουμε

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x(1 + \sigma\upsilon\nu x)} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \right) =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} =$$

$$= -1 \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Με τις ιδιότητες που αναφέρουμε μέχρι τώρα μπορούμε να

προσδιορίσουμε τα όρια απλών συναρτήσεων. Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \to x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \to u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου τα όρια της μορφής $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$ με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: “$g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0” και γι’ αυτό δεν θα ελέγχεται.

Για παράδειγμα:

α) Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \eta\mu\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Αν θέσουμε $u = x^2 + \frac{\pi}{4}$, τότε,

$$\lim_{x \to 0} u = \lim_{x \to 0}\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to 0} \eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{u\to \frac{\pi}{4}} \eta\mu u =$$

$$= \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

β) Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}.$$

Είναι

$$\frac{\eta\mu 3x}{x} = 3\frac{\eta\mu 3x}{3x}.$$

Έτσι, αν θέσουμε $u = 3x$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} u = \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$, οπότε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3\lim_{u\to 0} \frac{\eta\mu u}{u} =$$

$$= 3\cdot 1 = 3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 0}(x^5 - 4x^3 - 2x + 5)$

ii) $\lim\limits_{x \to 1}(x^{10} - 2x^3 + x - 1)$

iii) $\lim\limits_{x \to -1}(x^8 + 2x + 3)^{20}$

iv) $\lim\limits_{x \to 3}[(x - 5)^3 \, |x^2 - 2x - 3|]$

v) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^4 + 2x - 5}{x + 3}$

vi) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{|x^2 - 3x| + |x - 2|}{x^2 + x + 1}$

vii) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{(x+2)^2}$

viii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2+4x+3}$.

2. Έστω μια συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ αν:

i) $g(x)=3(f(x))^2-5$

ii) $g(x)=\dfrac{|2f(x)-11|}{(f(x))^2+1}$

iii) $g(x)=(f(x)+2)(f(x)-3)$.

3. Να βρείτε τα όρια

i) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$$

ii) $$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$$

iii) $$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

iv) $$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}.$$

4. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

5. Να βρείτε (αν υπάρχει), το όριο της f στο x_0 αν:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 5x, & x>1 \end{cases}$ και $x_0=1$.

ii) $f(x)=\begin{cases} -2x, & x<-1 \\ x^2+1, & x\ge -1 \end{cases}$

και $x_0=-1$.

6. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}$

iv) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - ημx}{x} \right)$

v) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{ημx}{x^3 + x} \right)$

vi) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημ5x}{\sqrt{5x + 4} - 2}$.

7. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to π} \dfrac{ημ^2 x}{1 + συνx}$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - συν^2 x}{ημ2x}$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημx}{ημ2x}$.

8. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αν:

i) $1-x^2 \le f(x) \le 1+x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $1-x^4 \le f(x) \le \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + \beta, & x \le 3 \\ \alpha x + 3\beta, & x > 3 \end{cases}.$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 10$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}$$

ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{\nu+1}-(\nu+1)x+\nu}{x-1}$$

iii) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}$$

2. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν

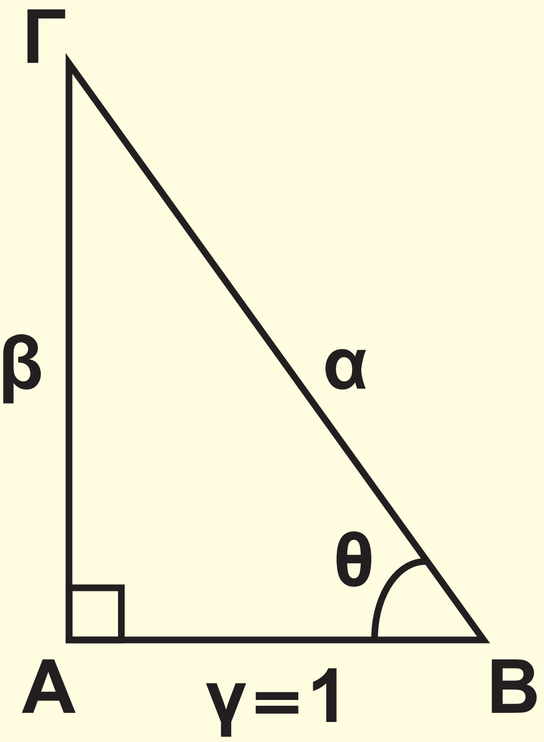
i) $$\lim_{x\to -5}\frac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5}$$

ii) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5}$

iii) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5}$

iv) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

3. **Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\gamma = 1$. Να υπολογίσετε τα όρια:**



i) $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta)$, ii) $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha^2 - \beta^2)$

iii) $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\beta}{\alpha}$.

4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αν:

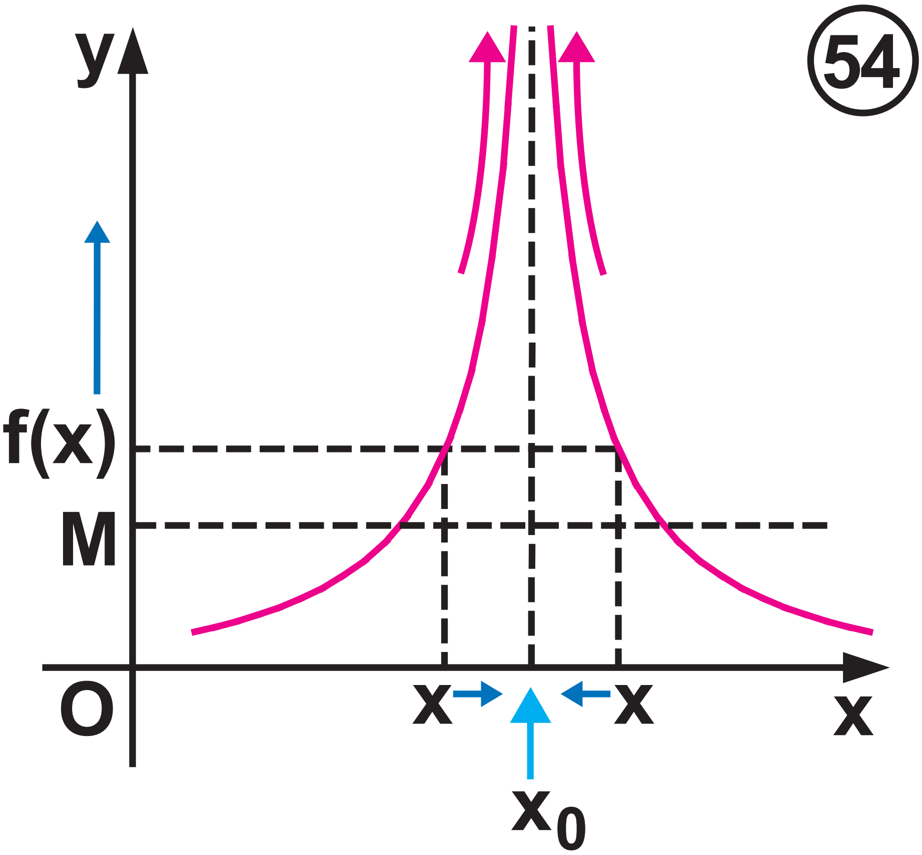
i) $\lim\limits_{x\to 1}(4f(x)+2-4x)=-10$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1.$

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

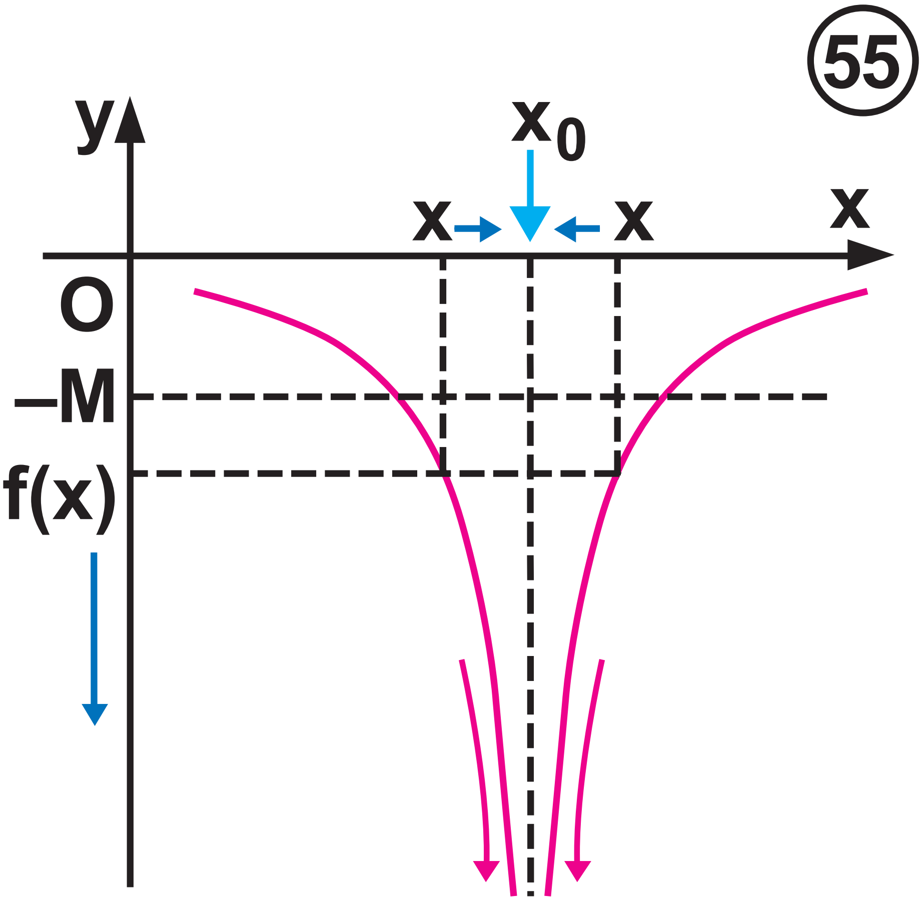
— Στο σχήμα 54 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x′x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές f(x) αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό Μ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$



— Στο σχήμα 55 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα x′x πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές f(x) ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$ $(M>0)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$



ΟΡΙΣΜΟΣ*

Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ορίζουμε

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$,
με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει

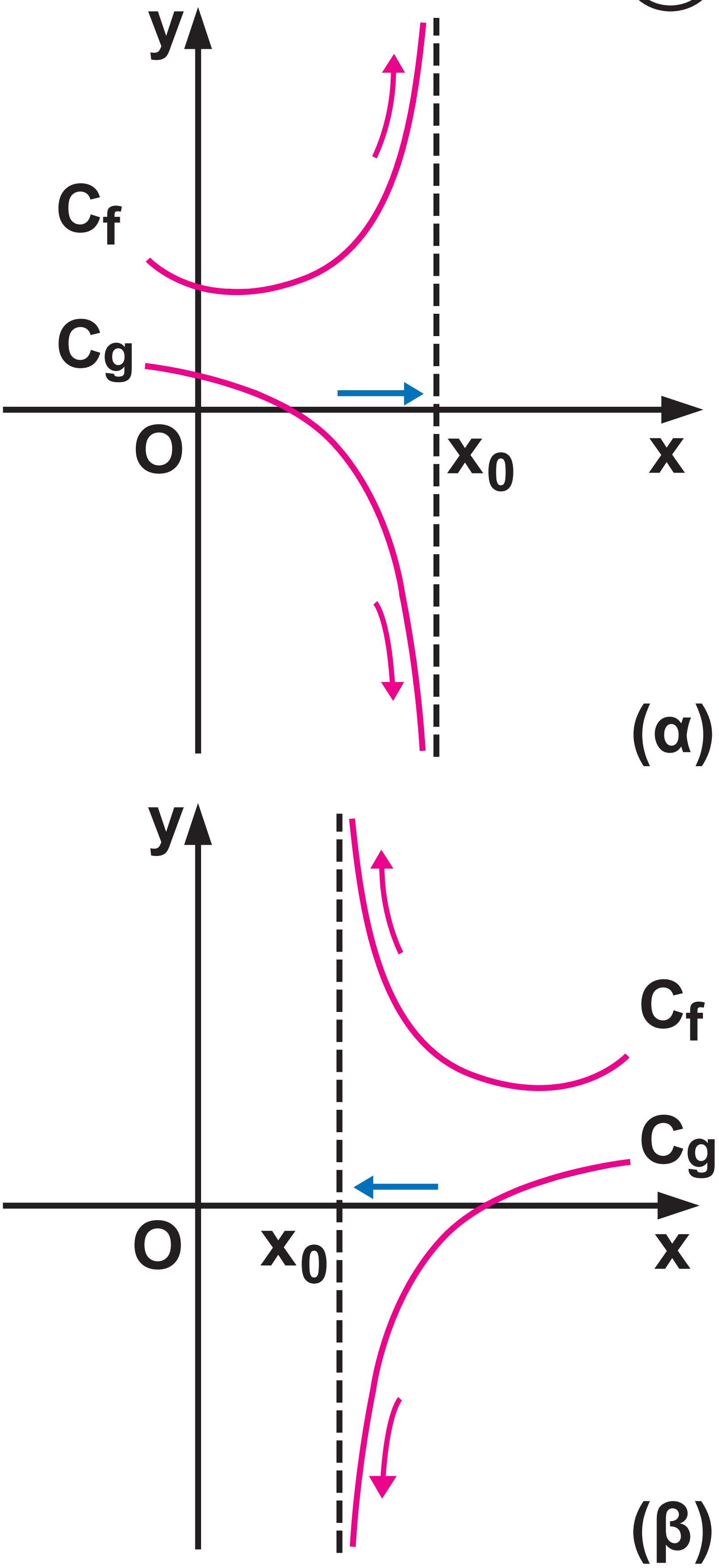
$$f(x) > M$$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε
για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$,
με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει

$$f(x) < -M$$

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν όταν $x \to x_0^-$ και $x \to x_0^+$.

56



Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$,

ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty.$$

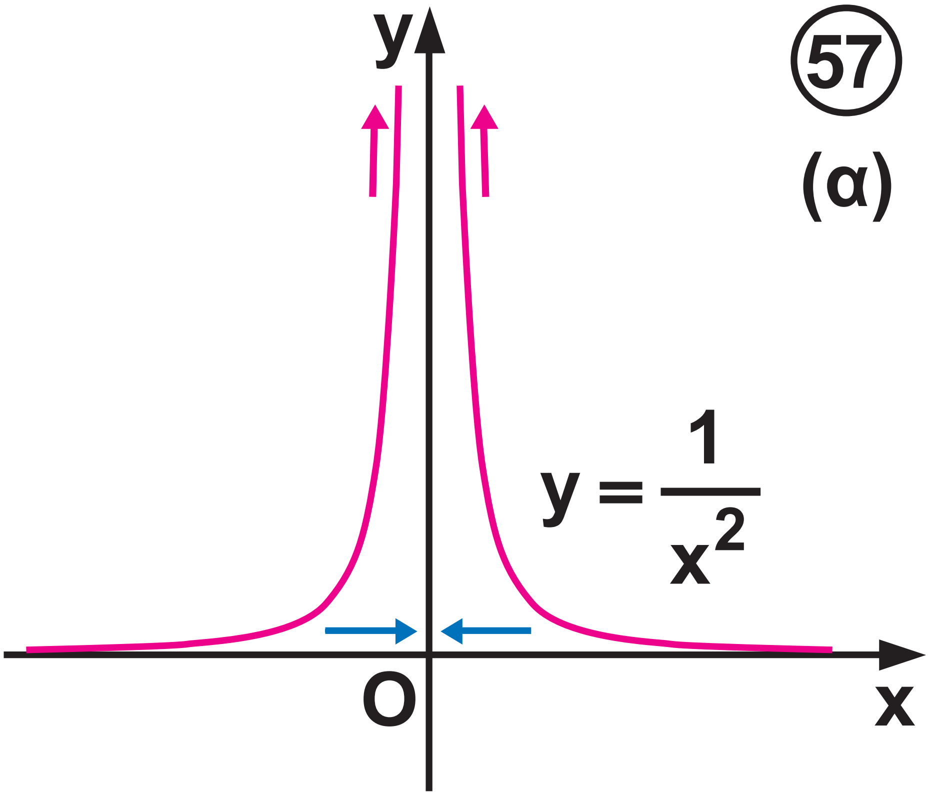
• Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty.$$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά

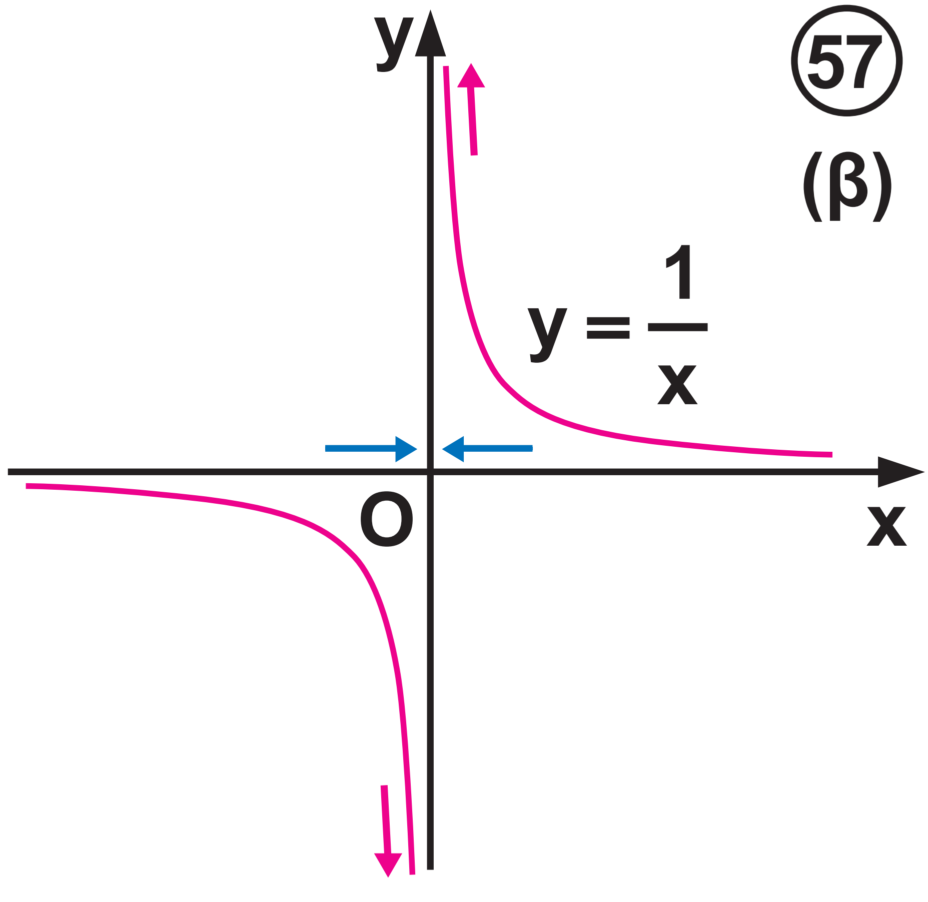
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}^*$ (Σχ. 57α)



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}$$

ενώ

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ και γενικά } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \nu \in \mathbb{N} \text{ (Σχ. 57β).}$$



57

(β)

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x)=\frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$			
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$				
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	

	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	;	;

	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)+(-\infty) \text{ και } 0\cdot(\pm\infty).$$

Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty) \text{ και } \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Για παράδειγμα:

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις

$f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

και

$$\lim_{x \to 0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις

$f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, τότε

έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε να δώσουμε και για τις άλλες μορφές.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-1|}$ ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3x+2}{(x-2)^2}$.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}|x-1|=0$ και $|x-1|>0$ κοντά στο 1, είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$.

Επειδή επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+6)=2$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{|x-1|}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right]=+\infty.$$

ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$ και

$(x-2)^2>0$ κοντά στο 2, είναι

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$. Επειδή επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 2}(-3x+2)=-4$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{-3x+2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right]=$$

$=-\infty$.

2. Να βρεθούν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$ στο $x_0=2$ και στη συνέχεια να εξετασθεί, αν υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο 2.

ΛΥΣΗ

— Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ και $x-2>0$ για $x>2$, είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty.$

Επειδή επιπλέον $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-x+1)=3,$

έχουμε $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=$

$$=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x-2}(x^2-x+1)\right]=+\infty.$$

— Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ και $x-2<0$

για $x<2$, είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

Επειδή επιπλέον $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x+1)=3$,

έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x+1}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right]=-\infty.$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα. Επομένως δεν υπάρχει όριο της f στο 2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν:

   i) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_0=0$

   ii) $f(x)=\dfrac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_0=1$

   iii) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}$, $x_0=0$.

2. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0, όταν:

   i) $f(x)=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^2}$, $x_0=1$

ii) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x|x|}$, $x_0 = 0$

iii) $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x_0 = 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το

$$\lim_{x\to 4}\frac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}.$$

2. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ δεν έχει όριο στο $\dfrac{\pi}{2}$.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ δεν έχει όριο στο 0.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \text{ και}$$

$$g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 0} g(x).$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια.

4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν:

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-4}{f(x)} = +\infty$

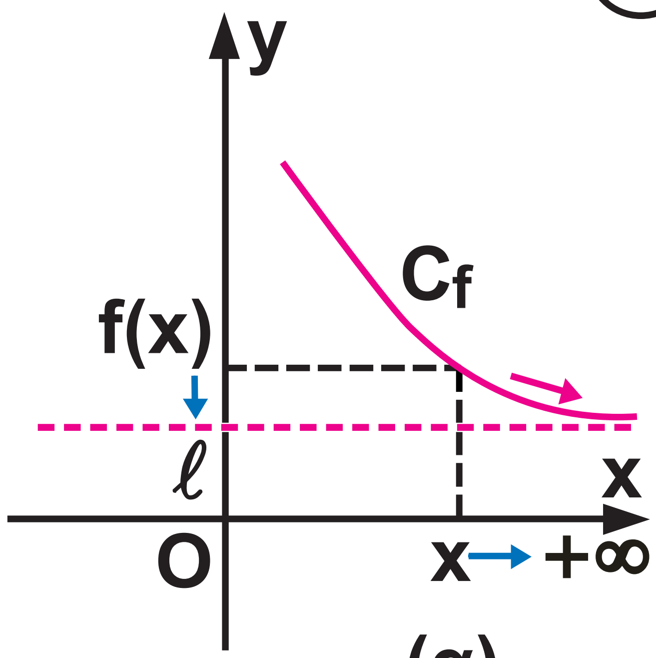
ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x+2} = -\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} [f(x)(3x^2-2)] = +\infty$.

1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

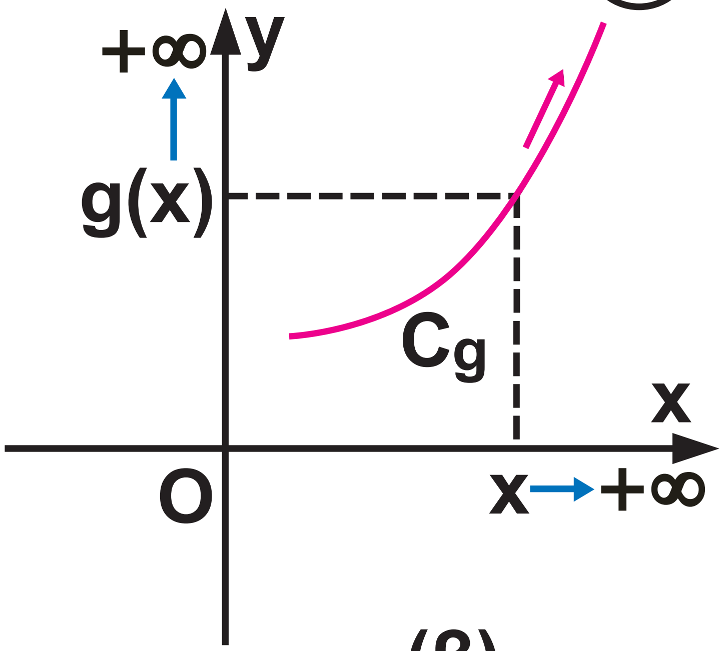
Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής (α,+∞).

58

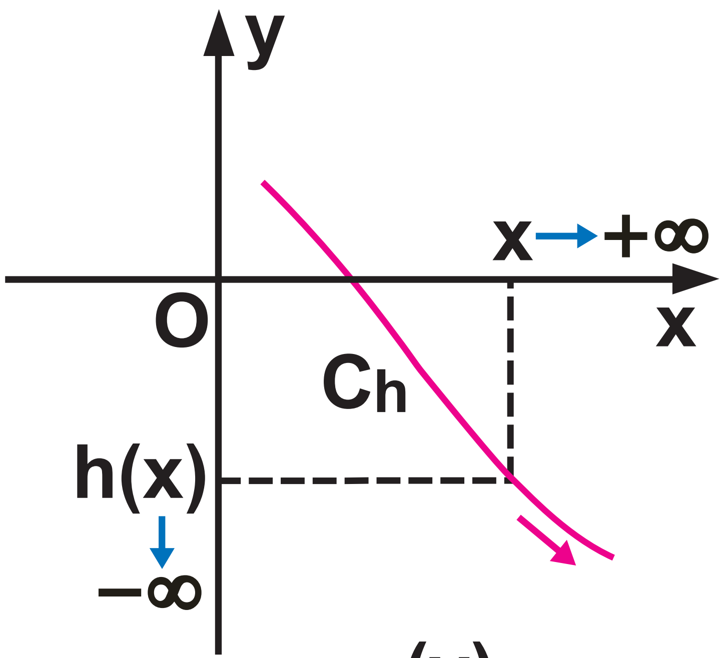


(α)

58



(β)



(γ)

Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

— το f(x) προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

— το g(x) αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

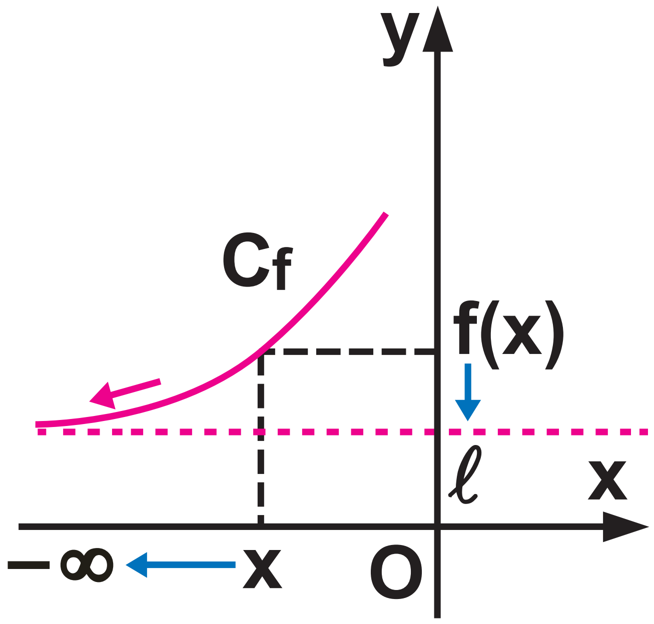
— το h(x) μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η h έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

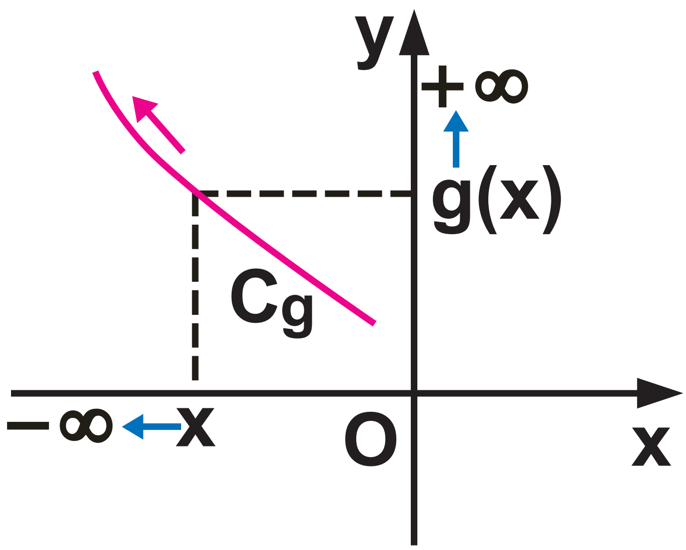
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.
Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \to -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$. Έτσι, για τις συναρτήσεις f, g, h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:

59



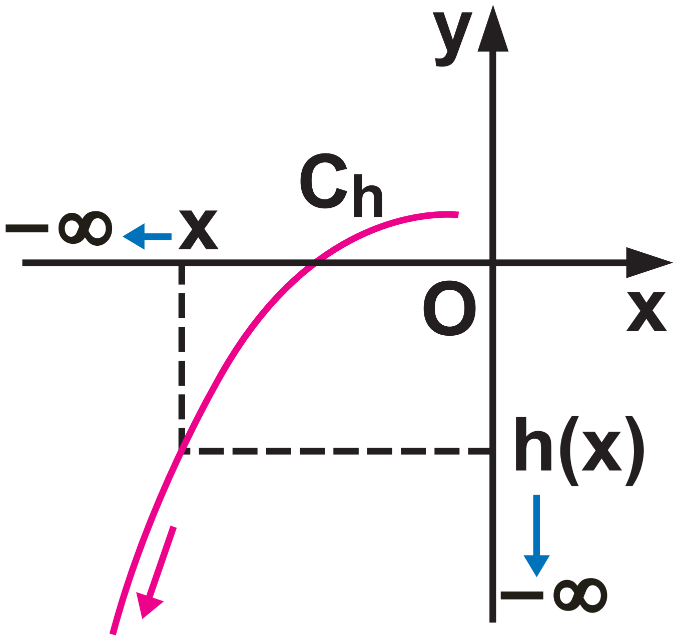
(α)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$



(β)

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$



(γ)

και $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.

Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\nu} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0,$$

$\nu \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \to -\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0, \ \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty, \ \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και

— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x^3-5x^2+2x-1$. Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων για τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:
Για $x\neq 0$ έχουμε

$$f(x)=2x^3\left(1-\frac{5}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}\right).$$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)=$$

$$=1-0+0-0=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$$

έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty=\lim_{x\to+\infty}(2x^3).$$

Γενικά

Για την πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0,$$

με $\alpha_\nu \neq 0$

ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)=\lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to -\infty} (4x^5 - 3x^3 + 6x^2 - x + 7) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (4x^5) = -\infty.$$

● Έστω τώρα η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{5x^3 + x - 7}.$$

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{3x^2\left(1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}\right)}{5x^3\left(1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}\right)}=$$

$$=\frac{3x^2}{5x^3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}}{1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}}.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}}{1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x^2}-\frac{7}{5x^3}\right)}=1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5x}\right)=0$$

έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x^3}\right).$$

Γενικά,

Για τη ρητή συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0},$$

$\alpha_\nu\neq 0$, $\beta_\kappa\neq 0$

ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$ και

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

Για παράδειγμα,

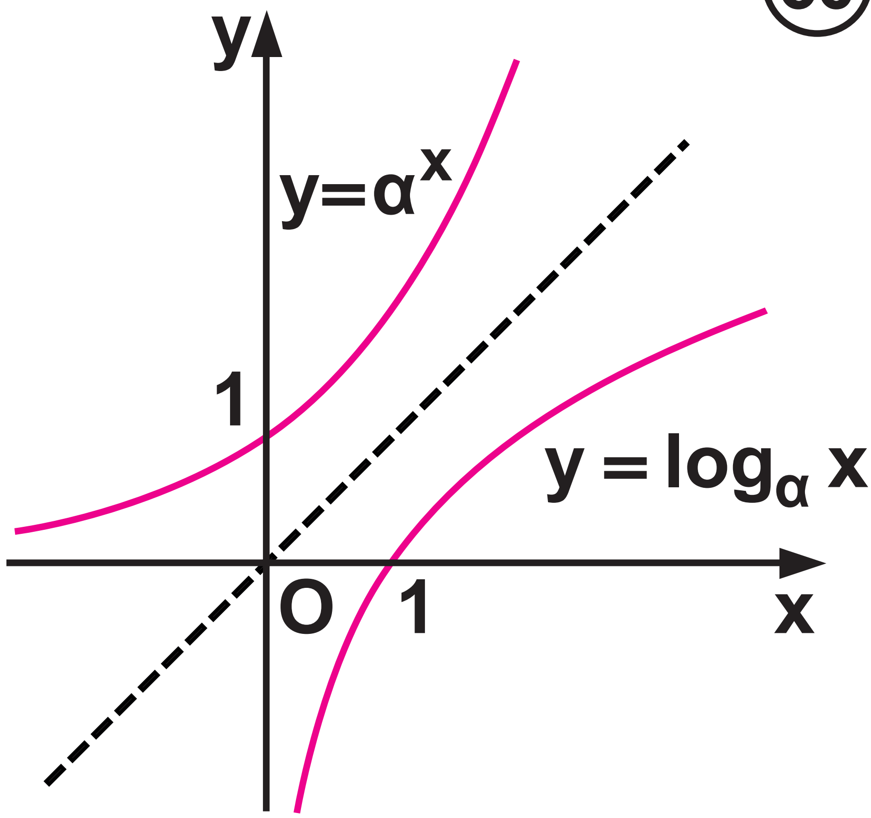
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 - 6x + 1}{3x^2 + x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5x^2}{3x^2} \right) = \frac{5}{3}.$$

Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται[1] ότι:

- **Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε**

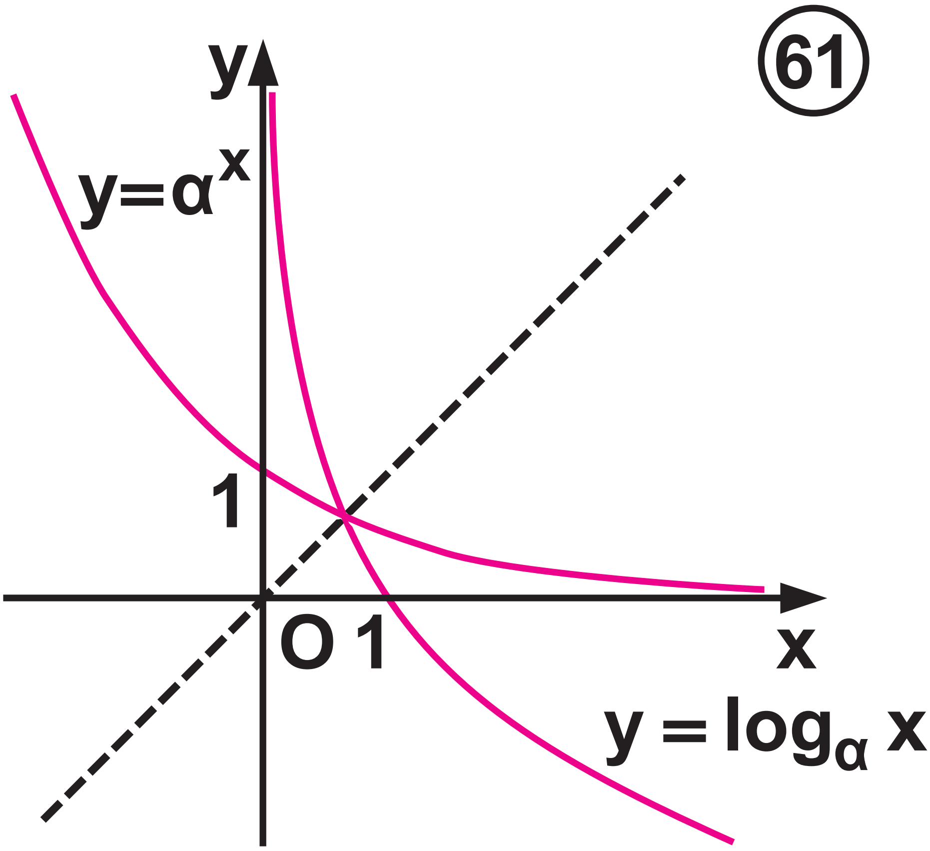
60



$$\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0} \log_\alpha x = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_\alpha x = +\infty$$

• Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε



$$\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \alpha^x = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \log_\alpha x = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_\alpha x = -\infty$$

---

(1) Η απόδειξη παραλείπεται.

Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

Η έννοια της ακολουθίας είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Συγκεκριμένα:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Η εικόνα α(ν) της ακολουθίας α συμβολίζεται συνήθως με α_ν, ενώ η ακολουθία α συμβολίζεται με (α_ν). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι μια ακολουθία.

Επειδή το πεδίο ορισμού κάθε ακολουθίας, είναι το $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$,

έχει νόημα να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της για πολύ μεγάλες τιμές του ν, δηλαδή όταν $\nu \to +\infty$.
Ο ορισμός του ορίου ακολουθίας είναι ανάλογος του ορισμού του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ και διατυπώνεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$$

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν $x \to +\infty$, που μελετήσαμε στα προηγούμενα, ισχύουν και για τις ακολουθίες. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων αυτών μπορούμε να υπολογίζουμε όρια ακολουθιών.

Για παράδειγμα,

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{2\nu^2 - 3\nu + 5}{4\nu^2 + \nu - 1} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{2\nu^2}{4\nu^2} = \frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-10x^3 + 2x - 5)$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3 - 2x + 1)$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{x^3 + 8}$

iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$

v) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + x - 1}{4x^3 - x^2 + 2}$

vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^{10}+x+3}$

vii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{5}{x+2}\right)$

viii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2+5}{x} - \dfrac{x^2+3}{x+2}\right)$

2. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-2x+3}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+10x+9}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2})$

iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x\right)$, $\alpha \neq \beta$

v) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x + 3}$.

3. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$

v) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

vi) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1}+\mu x)$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$.

2. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

3. Αν $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha x + \beta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x^2 - 5x| + x}{x^2 - 3x + 2}$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + 5 - x}{x + \sqrt{4 + 3x^2}}$

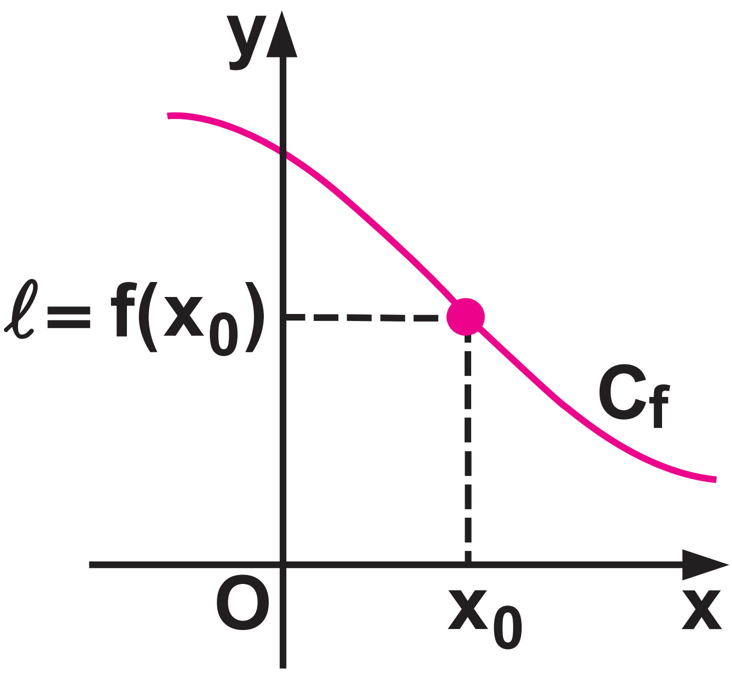
iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x^2-x|}{x-1}$.

1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός της συνέχειας

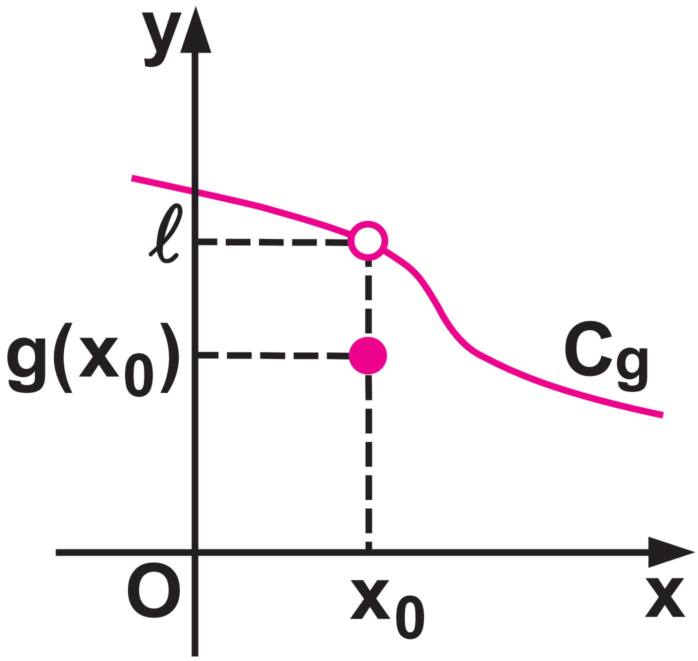
Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.

62

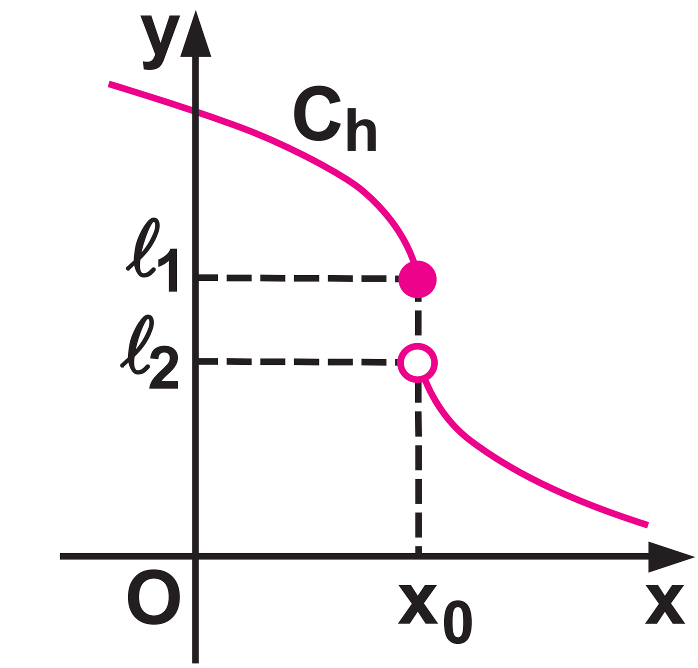


(α)

94 / 69 - 70



(β)



(γ)

Παρατηρούμε ότι:

— Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

— Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \neq g(x_0).$$

— Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_0** μόνο τη συνάρτηση f. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0).$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή
β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x\le 0 \\ 2-x, & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$$ **δεν είναι συνεχής στο 0, αφού**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1, \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(2-x) = 2,$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

— Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x \neq 1 \\ 3, & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$$ δεν είναι

συνεχής στο 1, αφού

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+1) = 2,$$

ενώ $f(1) = 3$.

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση.**

Για παράδειγμα:

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις** $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ **είναι συνεχείς,** αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

— **Οι συναρτήσεις** $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$ **είναι συνεχείς.**

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g,\ c\cdot f,\ \text{όπου}\ c\in\mathbb{R},\ f\cdot g,$$

$$\frac{f}{g},\ |f|\ \text{και}\ \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Για παράδειγμα:

— Οι συναρτήσεις $f(x)=\text{εφ}x$ και $g(x)=\text{σφ}x$ είναι συνεχείς ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

— Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{3x-2}$ είναι

συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$, αφού η συνάρτηση $g(x)=3x-2$ είναι συνεχής.

— Η συνάρτηση $f(x)=|x\eta\mu x|$ είναι συνεχής, αφού είναι της μορφής $f(x)=|g(x)|$, όπου $g(x)=x\eta\mu x$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=x$ και $f_2(x)=\eta\mu x$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι για τη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\varphi(x) = \eta\mu(x^2 - 1)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = \eta\mu x$.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & & y = x^2 - 1 \arrow[dl, "g"] \\
& \omega = \eta\mu y = \eta\mu(x^2 - 1) &
\end{tikzcd}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για ποια τιμή του α η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\alpha, & \text{αν} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$$

είναι συνεχής;

ΛΥΣΗ

— Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η f έχει τύπο $f(x)=x^2+2\alpha$ και επομένως είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f έχει τύπο $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ και επομένως είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι η f συνεχής, αρκεί να είναι συνεχής και στο $x_0=0$, δηλαδή

αρκεί $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Έχουμε όμως:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 2\alpha) = 2\alpha,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και}$$

$$f(0) = 2\alpha.$$

Επομένως, αρκεί $2\alpha = 1$ ή, ισοδύναμα, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

Πολλά από τα θεωρήματα της Ανάλυσης αναφέρονται σε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Είναι, επομένως, απαραίτητο να γνωρίζουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

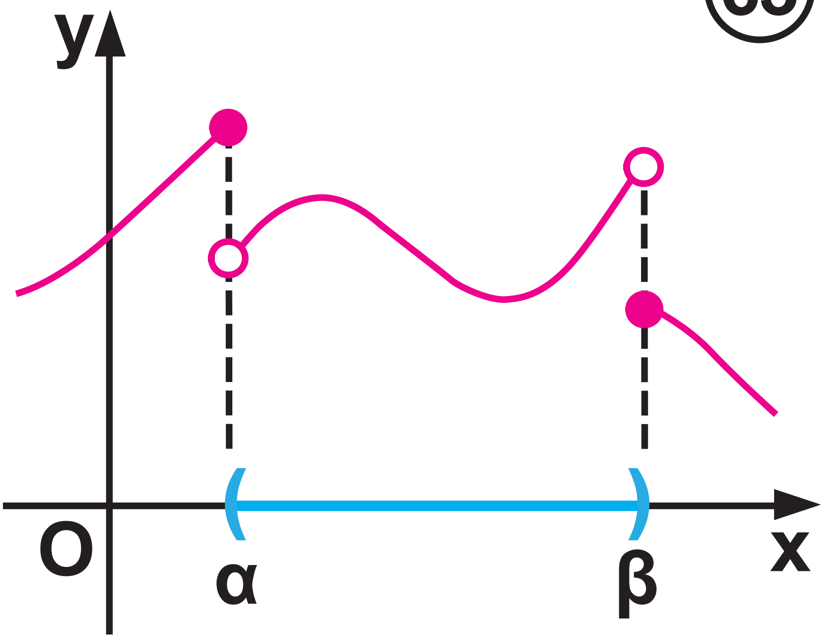
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β). (Σχ. 63α)

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

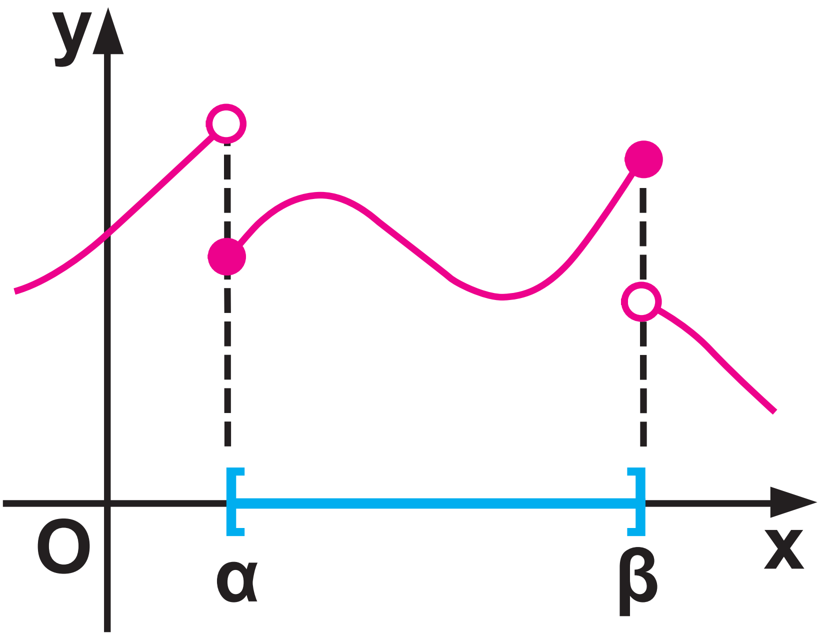
$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

(Σχ. 63β)

63



(α)



(β)

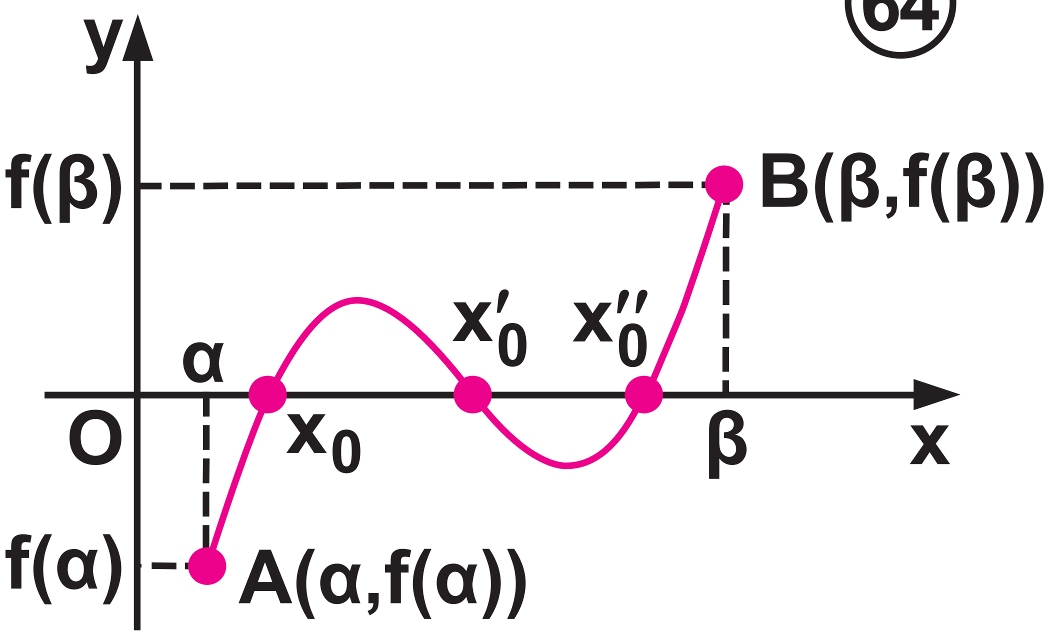
Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής (α, β], [α, β).

Δυο βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων σε διαστήματα εκφράζονται από τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα του Bolzano

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β]. Επειδή τα σημεία A(α, f(α)) και B(β, f(β)) βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x′x, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

64



Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = 0.$$

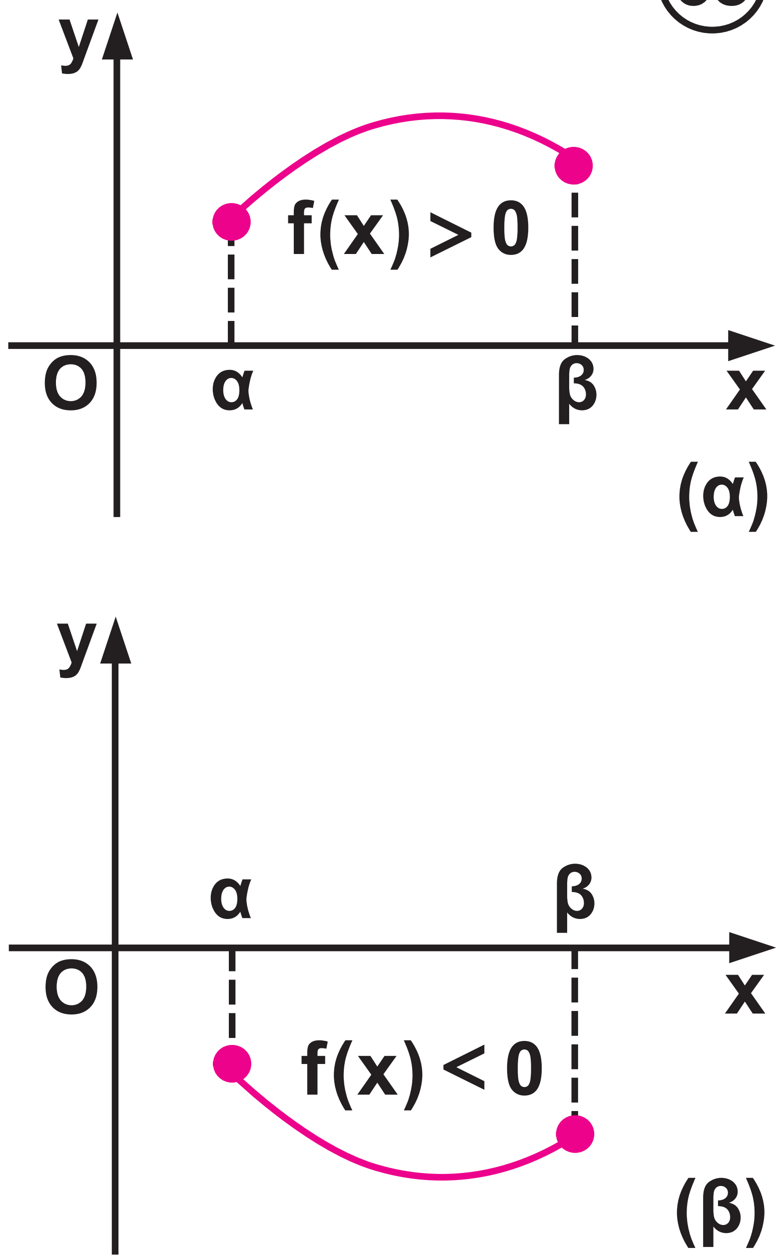
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

ΣΧΟΛΙΟ

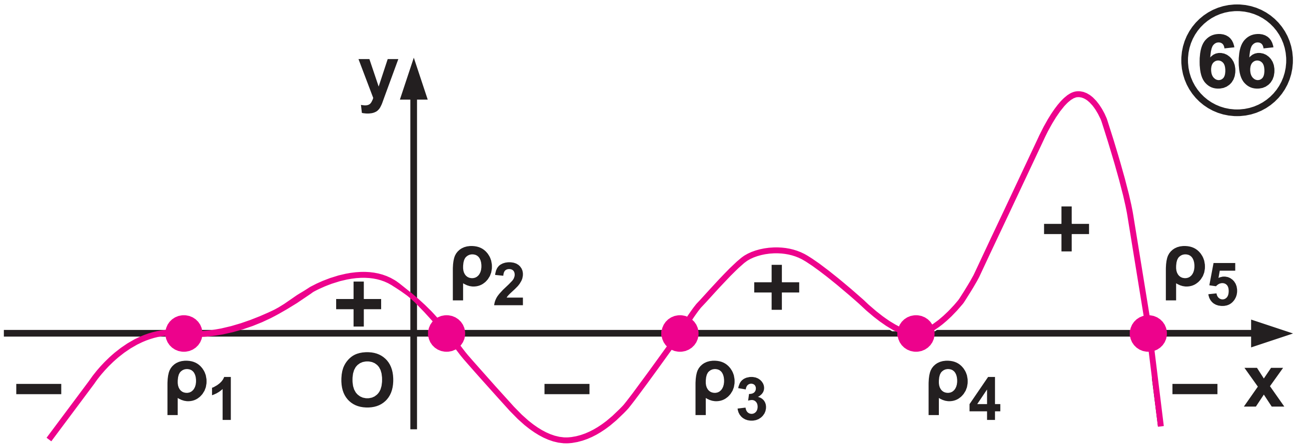
Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in Δ$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in Δ$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)

65



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x) = ημx - συνx,\ x \in [0,\ 2π].$$

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες της $f(x) = 0$ στο $[0, 2π]$. Έχουμε

$$ημx - συνx = 0 \Leftrightarrow ημx = συνx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow εφx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{π}{4} \text{ ή } x = \frac{5π}{4}.$$

Έτσι οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα

$$\left[0, \frac{π}{4}\right), \left(\frac{π}{4}, \frac{5π}{4}\right) \text{ και } \left(\frac{5π}{4}, 2π\right].$$

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_0)$	–1	1	–1
Πρόσημο	–	+	–

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{4},2\pi\right]$ είναι $f(x) < 0$, ενώ στο διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$ είναι $f(x) > 0$.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

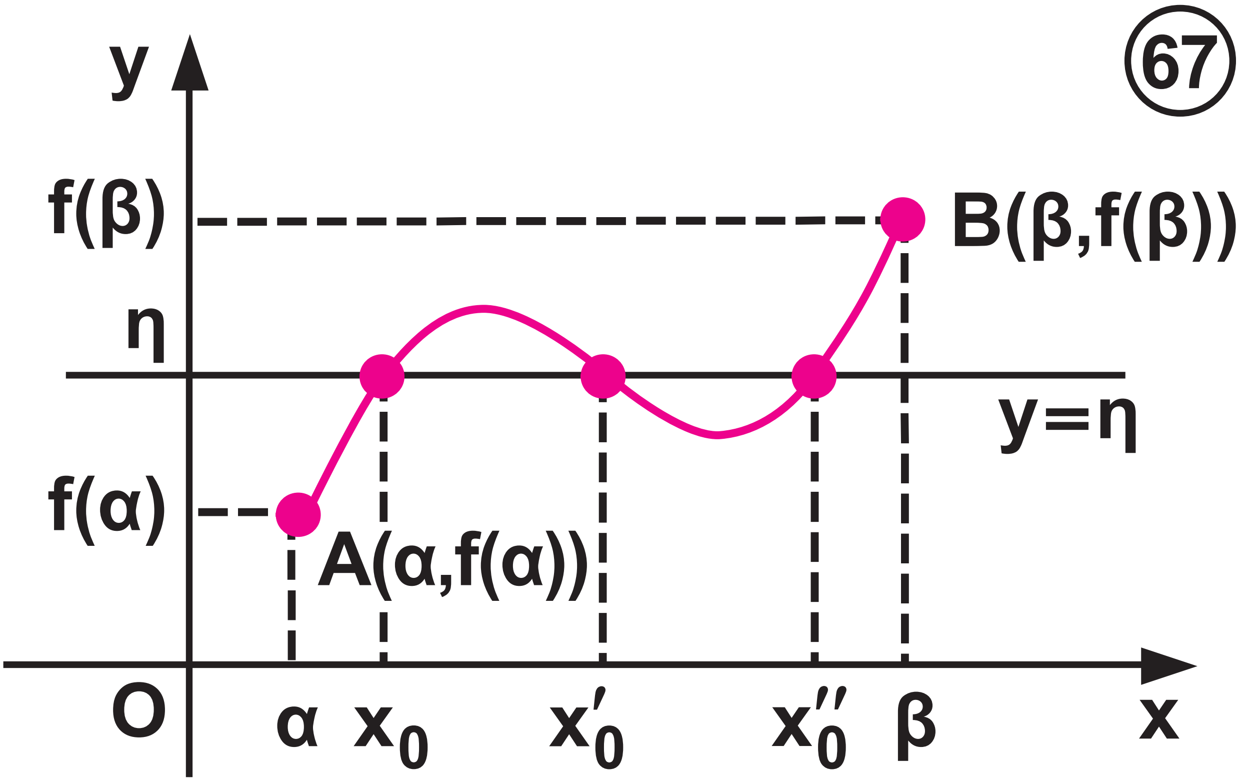
- η f είναι συνεχής στο [α, β] και

- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

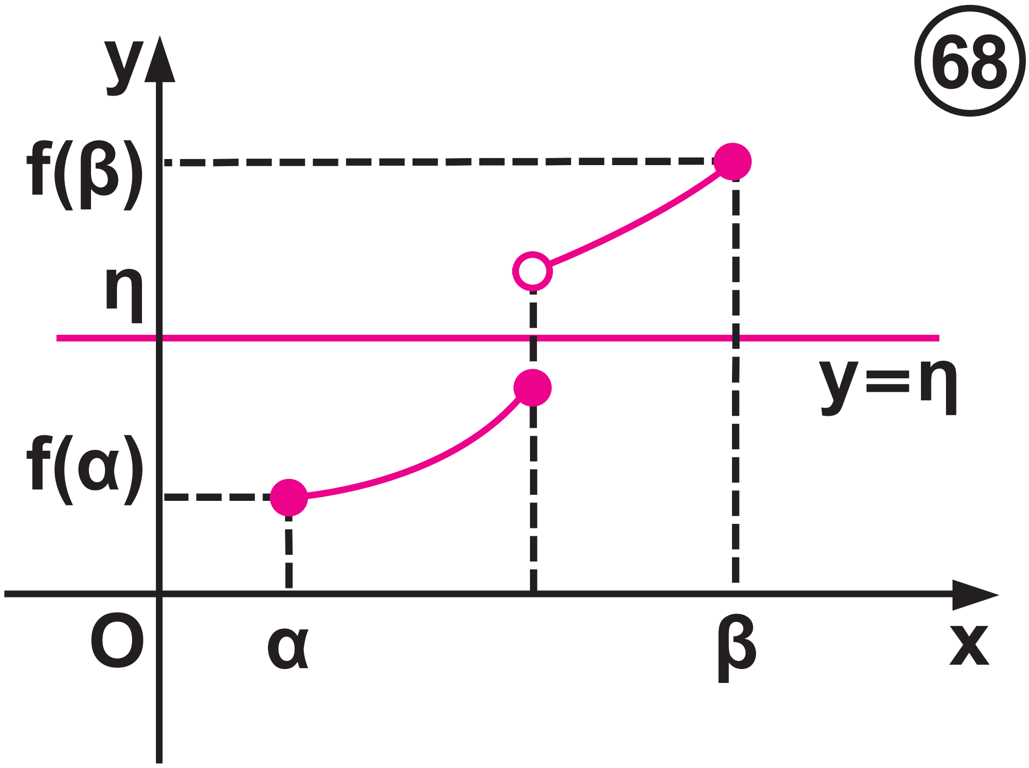


• η g είναι συνεχής στο [α, β] και

• $g(\alpha)g(\beta) < 0$,
αφού
$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και
$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■

ΣΧΟΛΙΟ

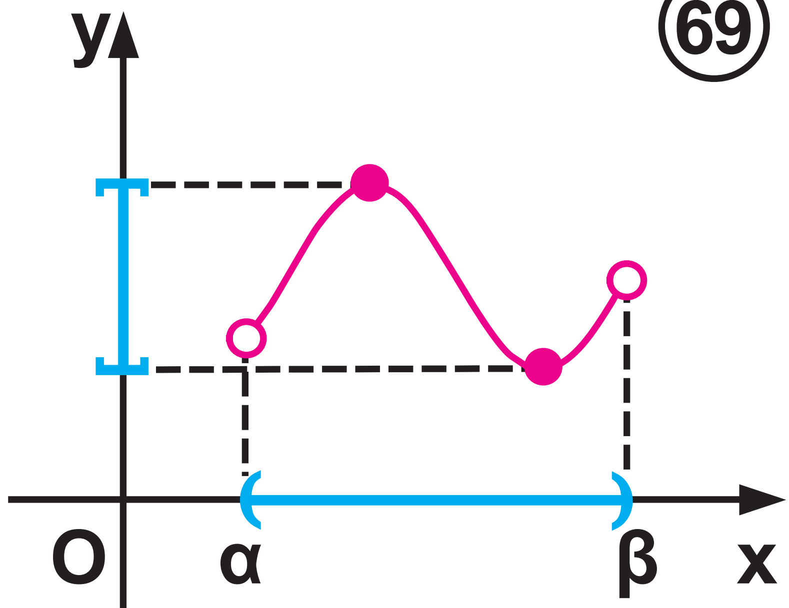
Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



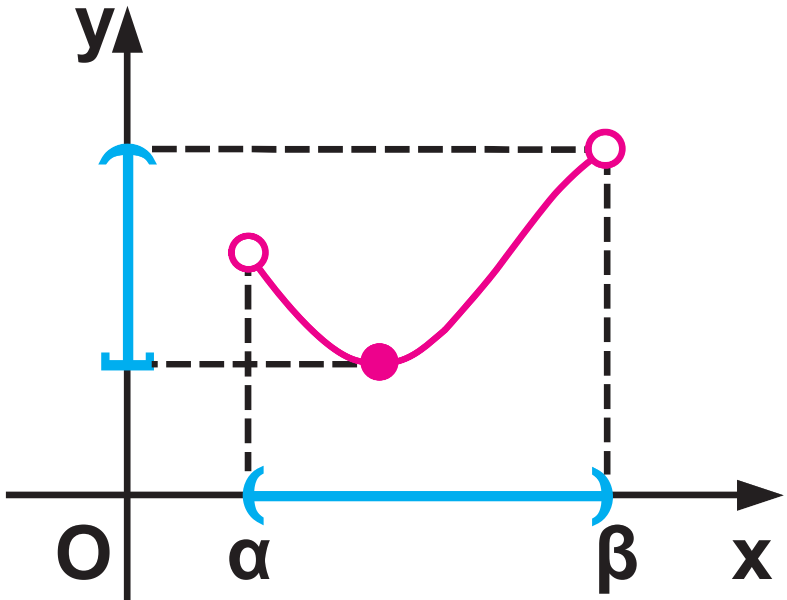
● **Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι:**

Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

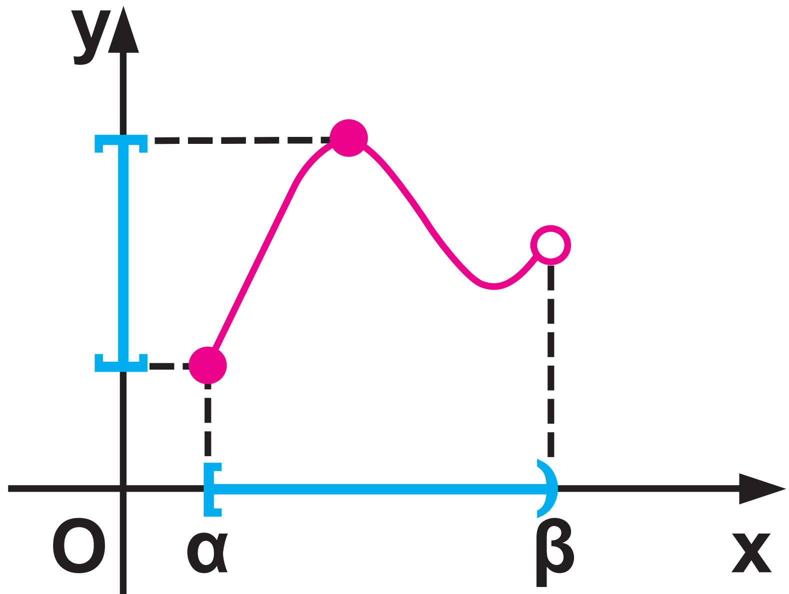
69



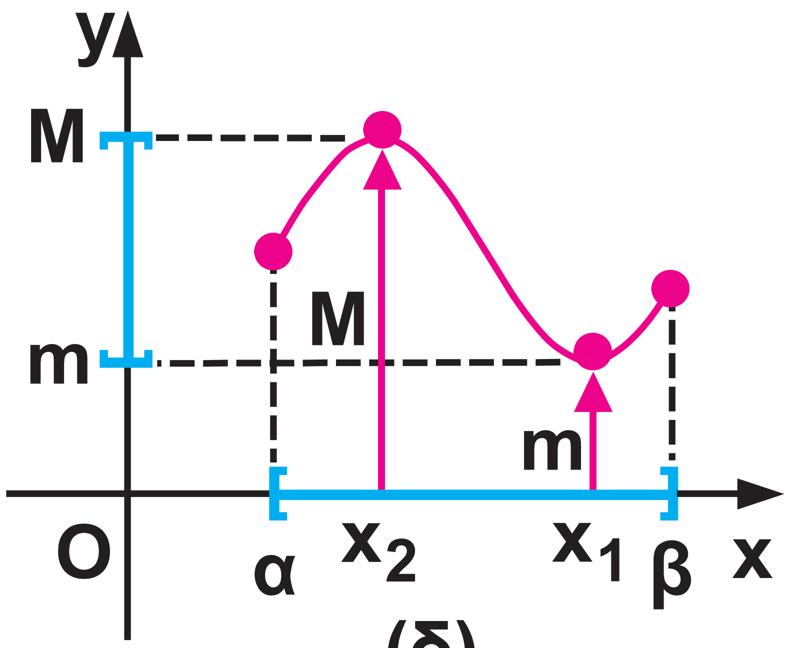
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα [α, β], ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ. 69δ)

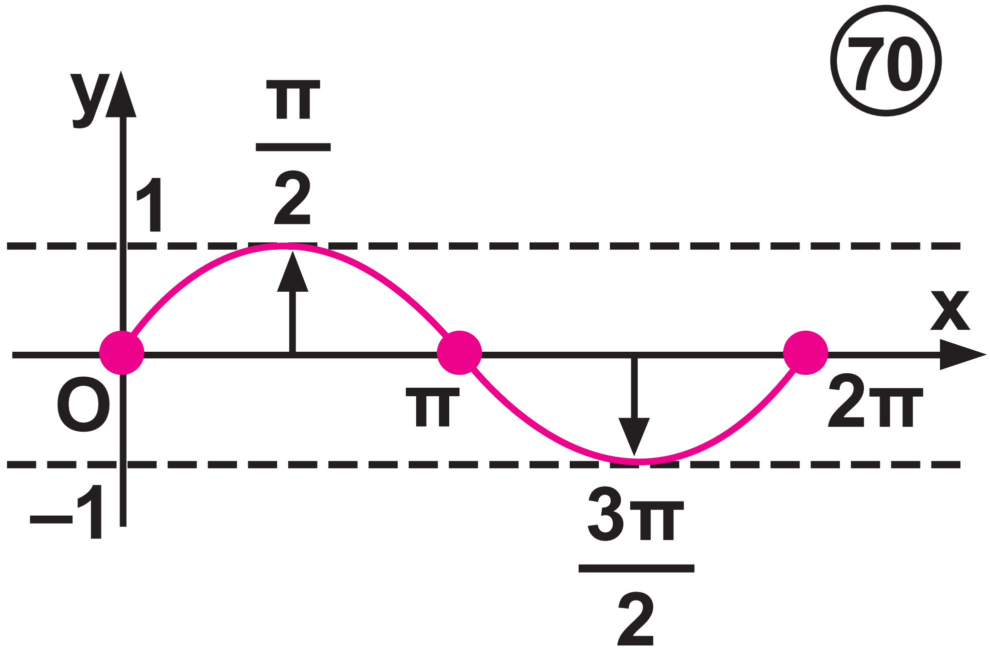
Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α, β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M], όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = ημx,\ x \in [0, 2π]$ έχει σύνολο τιμών το [–1, 1], αφού είναι συνεχής στο [0, 2π] με m = – 1 και M = 1.

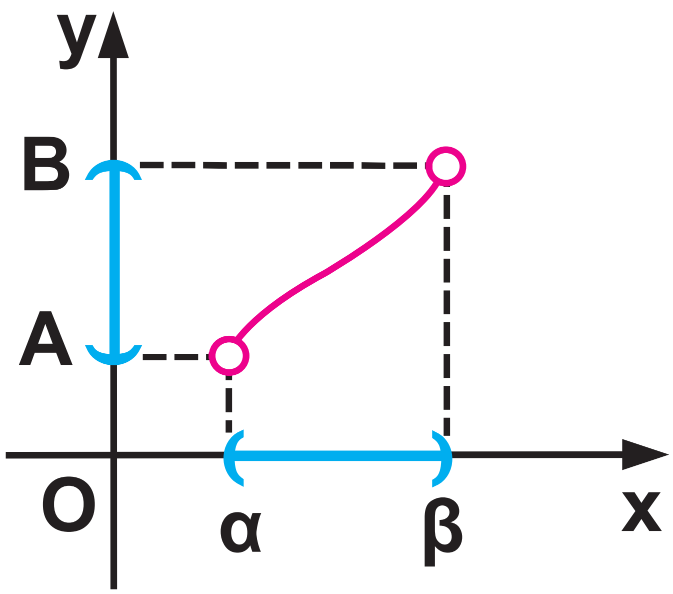


• Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) (Σχ. 71α), όπου

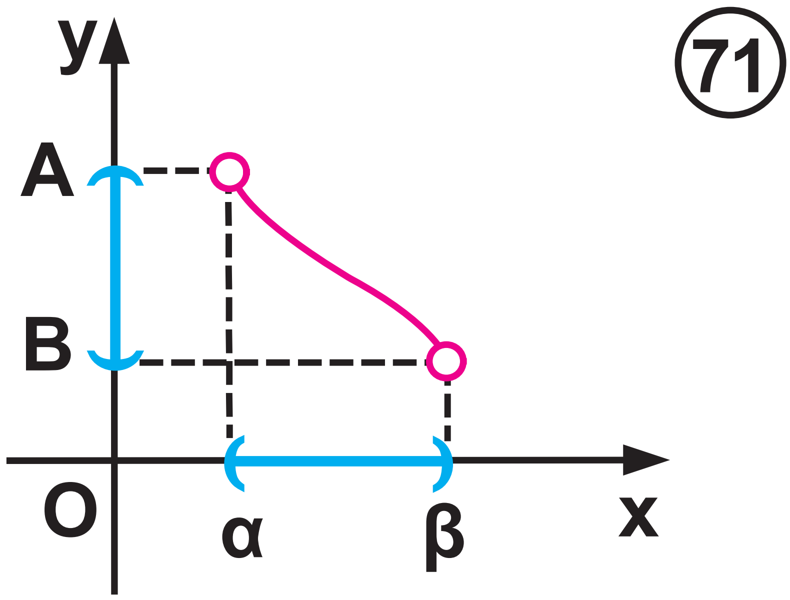
$$A = \lim_{x \to \alpha^{+}} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \to \beta^{-}} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Β, Α) (Σχ. 71β).



71

(α)

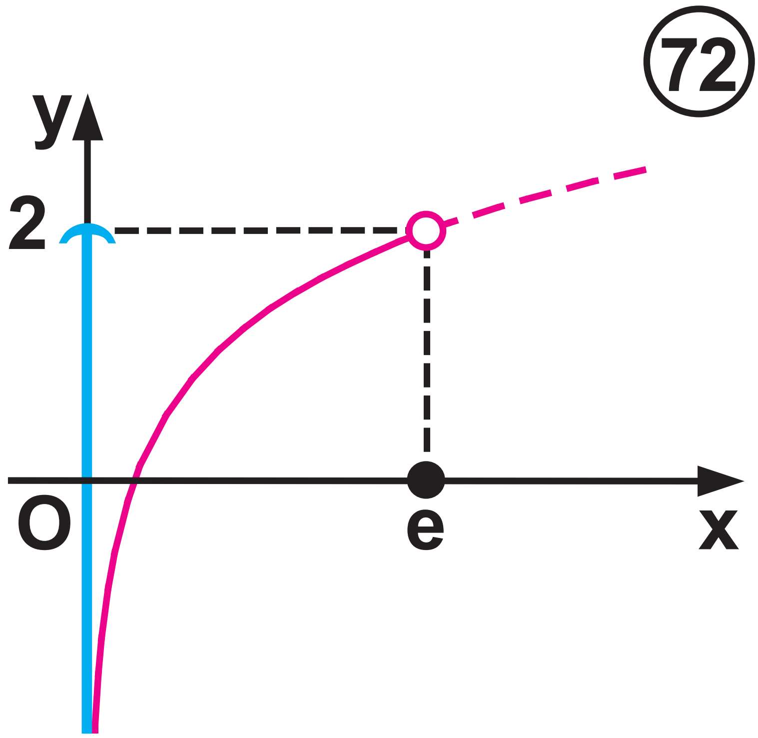


(β)

Για παράδειγμα,

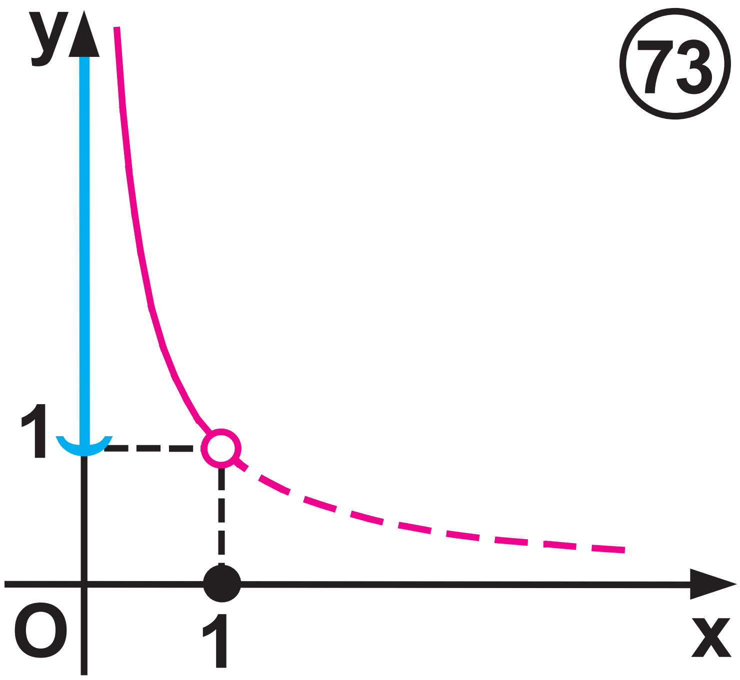
— Το σύνολο τιμών της $f(x) = \ln x + 1$, $x \in (0, e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα $(-\infty, 2)$, αφού

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \to e^-} f(x) = 2.$$



— Το σύνολο τιμών της $f(x) = \frac{1}{x}$,
$x \in (0,1)$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 73) είναι το διάστημα $(1,+\infty)$, αφού

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$



Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής [α, β], [α, β) και (α, β].

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x + συνx = 4$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(π, 2π)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x + συνx - 4$, $x \in [π, 2π]$. Τότε:

- Η f είναι συνεχής στο $[π, 2π]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

- Είναι $f(π) \cdot f(2π) < 0$, αφού
$f(π) = π + συνπ - 4 = π - 5 < 0$ και
$f(2π) = 2π + συν2π - 4 = 2π - 3 > 0$.

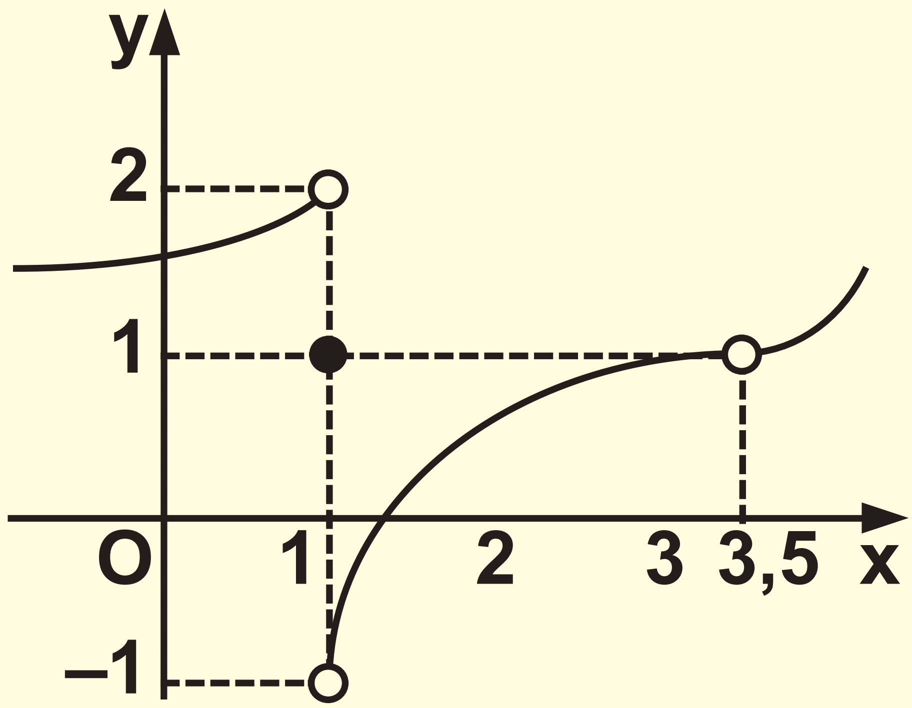
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (π, 2π)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, οπότε $x_0 + συνx_0 - 4 = 0$

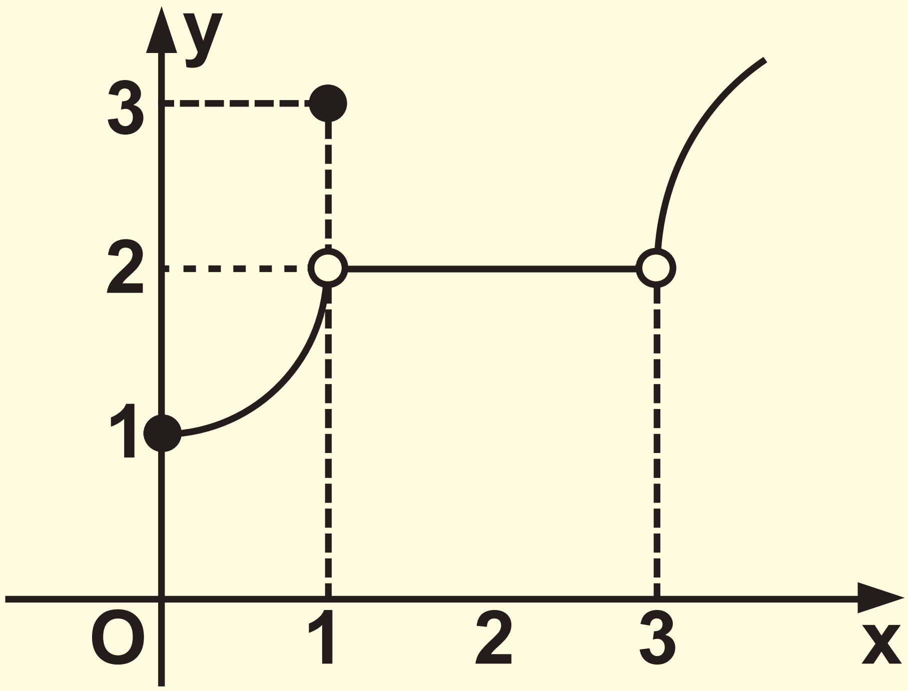
και συνεπώς $x_0 + συνx_0 = 4$. Άρα, η εξίσωση $x + συνx = 4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(π, 2π)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3\ \ , & x\geq 2 \end{cases}$,

αν $x_0=2$

ii) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ \sqrt{3+x}, & x\geq 1 \end{cases}$,

αν $x_0=1$

iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, & x\neq -2 \\ -3 \quad , & x=-2 \end{cases}$,

αν $x_0=-2$.

3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & |x|\leq 1 \\ \dfrac{2}{x} \quad , & |x|>1 \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} & , \quad x\neq 2 \\ 5 & , \quad x=2 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} x & , \quad x<1 \\ \ln x & , \quad x\geq 1 \end{cases}$

iv) $f(x)=\begin{cases} e^x & , \quad x\leq 0 \\ -x^2+1 & , \quad x>0 \end{cases}.$

4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3 & , \quad x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , \quad x>1 \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x} & , \quad x<0\\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad x\geq 0\end{cases}$.

5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

i) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$

ii) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$

iii) $f(x)=\eta\mu\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

iv) $f(x)=e^{\eta\mu x}$

v) $f(x)=\ln(\ln x)$

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημx - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, π)$.

7. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις f, να βρείτε έναν ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(α, α + 1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

i) $f(x) = x^3 + x - 1$

ii) $f(x) = x^5 + 2x + 1$

iii) $f(x) = x^4 + 2x - 4$

iv) $f(x) = -x^3 + x + 2$.

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha(x-\mu)(x-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+$$
$$+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)=0,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα (λ, μ) και μια στο (μ, ν).

9. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x, όταν:

i) $f(x)=x^3+2x^2-x-2$

ii) $f(x)=x^4-9x^2$

iii) $f(x)=\varepsilon\varphi x-\sqrt{3},\ x\in(-\pi,\pi)$

iv) $f(x) = ημx + συνx$,
$x \in [0, 2π]$.

10. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

i) $f(x) = \ln x - 1,\ x \in [1, e]$

ii) $f(x) = -x + 2,\ x \in (0, 2)$

iii) $f(x) = 2ημx + 1,\ x \in \left[0, \frac{π}{6}\right)$

iv) $f(x) = e^{x} + 1,\ x \in (-\infty, 0]$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x)=\begin{cases}(x-\kappa)(x+\kappa) & , \quad x\le 2\\ \kappa x+5 & , \quad x>2\end{cases}$,
να προσδιορίσετε το κ, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

2. Αν
$$f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\beta x-12 & , \quad x<1\\ 5 & , \quad x=1,\\ \alpha x+\beta & , \quad x>1\end{cases}$$
να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

3. i) Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Να βρείτε το f(0), αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$xf(x) = συνx - 1.$$

ii) Ομοίως, να βρείτε το g(0) για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|xg(x) - ημx| \leq x^2.$$

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο [0,1] και πληρούν τις σχέσεις $f(0) < g(0)$ και $f(1) > g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

5. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^4+1}{x-1}+\dfrac{x^6+1}{x-2}=0$

β) $\dfrac{e^x}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=0$

έχουν μια, τουλάχιστον, ρίζα στο (1, 2).

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

i) $f(x)=e^x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$

ii) $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$

7\. i) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$, για την οποία ισχύει

$$x^2+f^2(x)=1 \text{ για κάθε } x\in[-1,1].$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

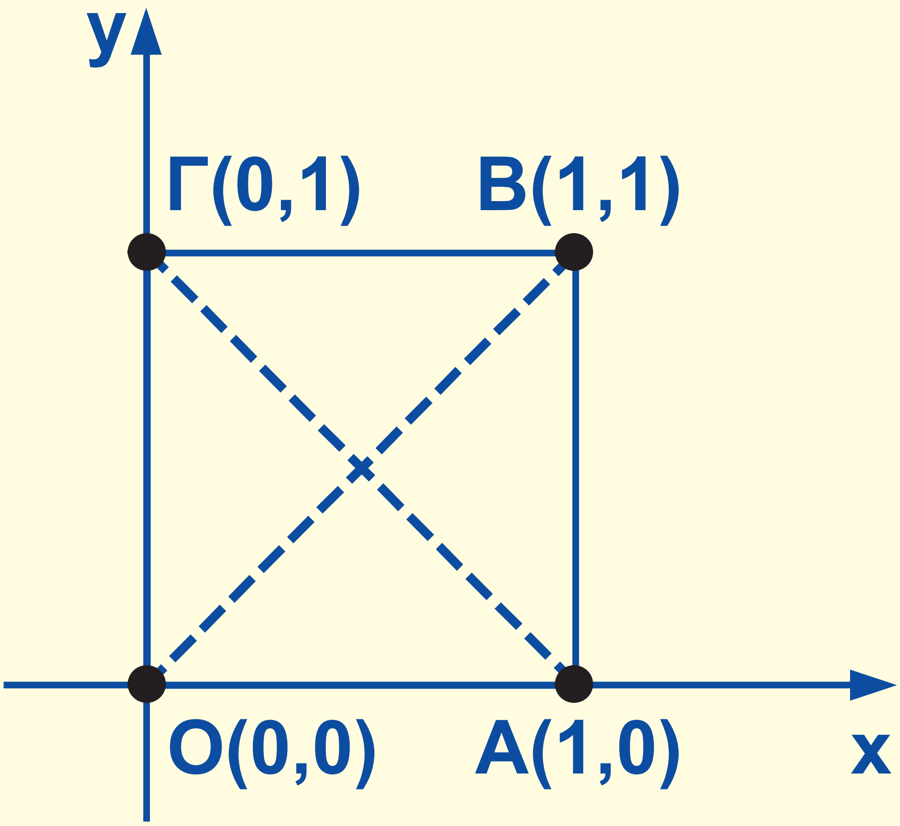
β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

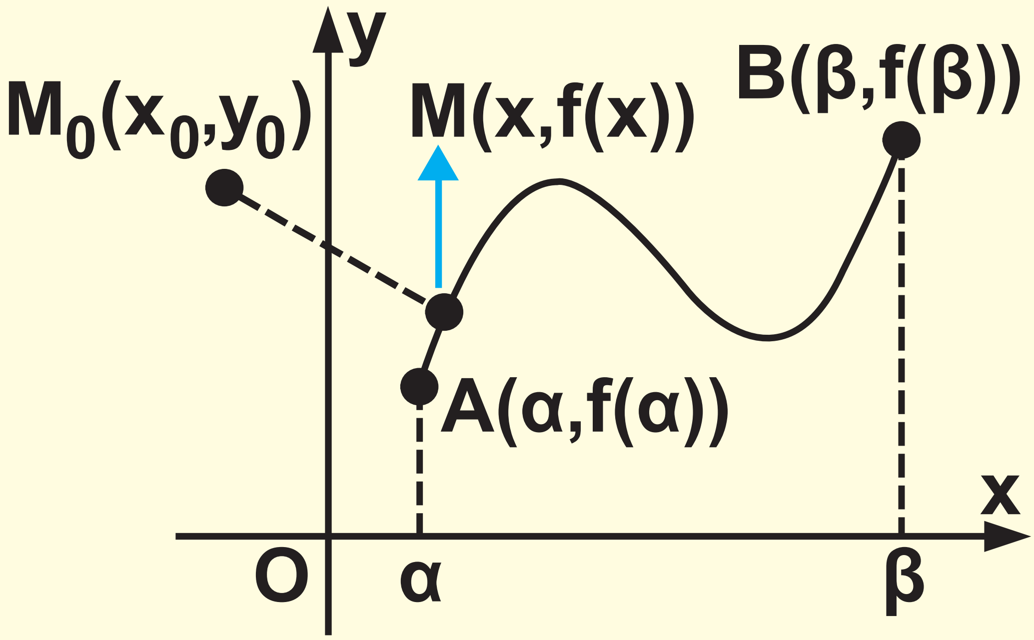
8. Δίνεται το τετράγωνο ΟΑΒΓ του παρακάτω σχήματος και μία συνεχής στο [0, 1] συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.



i) **Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και**

ii) **Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.**

9. **Στο παρακάτω σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο [α,β] και το $M_0(x_0, y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου,**



i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x) = (M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από το σημείο $M(x, f(x))$ της C_f για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε

   α) $(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$ Α Ψ

   β) $(f\circ g)(x)=-x,\ x\in\mathbb{R}$ Α Ψ

2. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=l\in\mathbb{R}$, τότε

   $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0.$ Α Ψ

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right]=$

$$=\lim_{x\to 0} x\cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}=$$

$$=0\cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}=0.$$ Α Ψ

4. Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0} f(x)>1$. Α Ψ

5. Ισχύει:

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$ Α Ψ

β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1.$ Α Ψ

6. Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x \to 0}(x^2 f(x)) = 0$. Α Ψ

7. Αν $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Α Ψ

8. Αν υπάρχει το $\lim_{x \to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6) \cdot g(6)$. Α Ψ

9. Αν $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \to x_0} f(x) = -1$. Α Ψ

10. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Α Ψ

11. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x \neq 4$ ισχύει $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$, τότε το f(4) είναι ίσο με 1. Α Ψ

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4$, $f(1) = 3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \pi$. Α Ψ

II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m$, $\ell, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

   Α) $\ell < m$ Β) $\ell \leq m$ Γ) $\ell \geq m$
   Δ) $\ell = m$ Ε) $m < \ell$.

2. Το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

   Α) 8 Β) 1 Γ) 0 Δ) $+\infty$
   Ε) – 8.

3. Το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$

είναι ίσο με:

Α) $+\infty$ Β) $-\infty$ Γ) 1 Δ) –1

Ε) 0.

4. Αν το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$ δεν

υπάρχει, τότε:

Α) $x_0 = 0$ Β) $x_0 = 2$

Γ) $x_0 = -1$ Δ) $x_0 = 1$.

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \text{ και } g(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

Από τους Παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

Α) η g είναι συνεχής στο 2

Β) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1.$

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$

Β) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$

Δ) $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{3x^{9}+x-1}$

Ε) $\lim_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x+1)]$

ΣΤ) $\lim_{x\to 0}[\ln(x^{3}+x-1)]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [0, 3]$, με $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ και $f(3) = -1$.

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α) Υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$.

Β) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$.

Γ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Δ) $[-1,2] \subseteq f(\Delta)$.

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο [0,3] είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το –1.

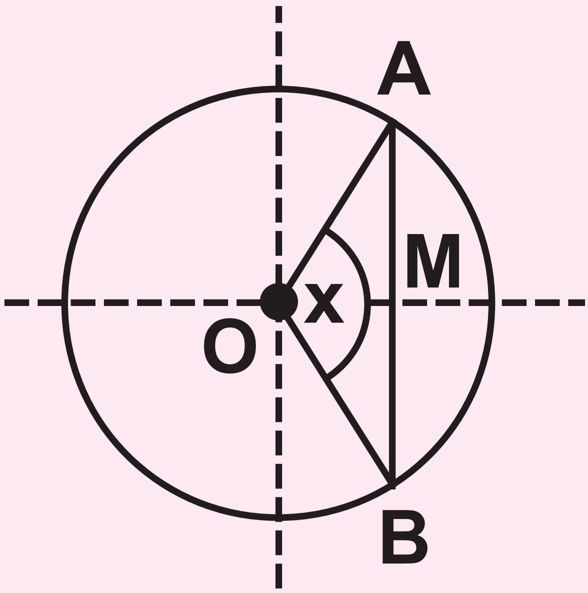
ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης, ως έκφραση μιας εξάρτησης ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένες ποσότητες, εμφανίζεται μ' έναν υπονοούμενο τρόπο ήδη από την αρχαιότητα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι πίνακες χορδών της "Αλμαγέστης", του Έλληνα μαθηματικού και αστρονόμου της αλεξανδρινής περιόδου Κλαύδιου Πτολεμαίου. Στη μια στήλη αυτών των πινάκων υπάρχουν τα μήκη των τόξων ενός κύκλου και στην άλλη τα μήκη των αντίστοιχων χορδών. Χρησιμοποιώντας την έννοια του ημιτόνου στον μοναδιαίο κύκλο μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά τη “συνάρτηση” των πινάκων του Πτολεμαίου ως εξής:

χορδή τόξου $(x) = AB = 2AM =$

$$= 2ημ\frac{x}{2}.$$

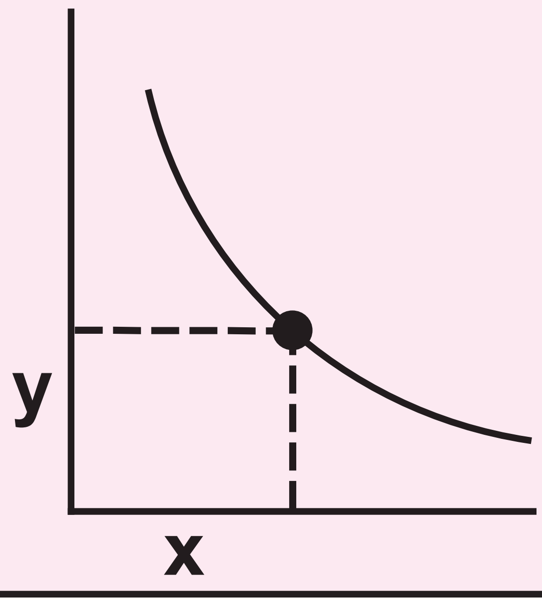


Με τον ίδιο υπονοούμενο τρόπο η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται στους λογαριθμικούς πίνακες που κατασκευάστηκαν στις αρχές του 17ου αιώνα.

Τα γεγονότα που έδωσαν αποφασιστική ώθηση στην ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης ήταν η δημιουργία της Άλγεβρας (χρήση γραμμάτων και ειδικών συμβόλων για την αναπαράσταση μαθηματικών πράξεων, σχέσεων, αγνώστων κ.λπ.) και της αναλυτικής γεωμετρίας (χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού σε γεωμετρικά προβλήματα). Ο Descartes, στο έργο του “La Geometrie” (1637), παρουσιάζοντας τη μέθοδο προσδιορισμού μιας καμπύλης από μια εξίσωση ως προς x και y (τα οποία εκφράζουν τα ευθύγραμμα τμήματα-συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης), περιέγραψε για πρώτη φορά τη

δυνατότητα αναλυτικής αναπα-ράστασης μιας σχέσης εξάρτη-σης ανάμεσα σε μεταβλητές πο-σότητες:

“Αν λοιπόν πάρουμε διαδοχικά ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών τιμών για το τμήμα y τότε θα προκύψει ένα άπειρο πλήθος τιμών για το τμήμα x και επομένως μια απειρία διαφορετικών σημείων, με τη βοή-θεια των οποίων μπορεί να σχεδια-στεί η ζητούμενη καμπύλη”.



Ο όρος “συνάρτηση” (από το λατινικό ρήμα fungor, που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ) εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673 σ’ ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο “Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων” (Methodus tangentium inversa, seu de functionibus), στο οποίο εξετάζεται ο υπολογισμός των τεταγμένων y των σημείων μιας καμπύλης όταν είναι γνωστή κάποια ιδιότητα των αντίστοιχων εφαπτομένων. Ο όρος αυτός άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή μια ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες, ιδιαίτερα όταν

η εξάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή μιας αναλυτικής έκφρασης. Ο J. Bernoulli έδωσε το 1718 τον επόμενο γενικό ορισμό:

“Ονομάζω συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους μια ποσότητα που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές”.

Η αντίληψη της συνάρτησης ως “αναλυτικής έκφρασης” κυριάρχησε για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, στη διάρκεια του οποίου η μαθηματική ανάλυση ορίζονταν ως η γενική επιστήμη των μεταβλητών και των συναρτήσεών τους. Ο επόμενος ορισμός, που

ταυτίζει την έννοια της συνάρτησης με αυτήν της “αναλυτικής έκφρασης”, δόθηκε από τον L. Euler το 1748, στο έργο του “Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση”.

“Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας ονομάζεται μια αναλυτική έκφραση που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτή τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες”.

Η παραπέρα εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης προήλθε κυρίως από την προσπάθεια μαθηματικής ερμηνείας φυσικών προβλημάτων, όπως π.χ. το πρόβλημα

μιας παλλόμενης χορδής, στερεωμένης στα δυο άκρα της. Σ' αυτό το πρόβλημα, που απασχόλησε ιδιαίτερα τους επιστήμονες στη διάρκεια του 18ου αιώνα, ζητείται να προσδιοριστεί μια συνάρτηση της μορφής $y = f(x, t)$ που περιγράφει το σχήμα της χορδής σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t. Το είδος όμως των συναρτήσεων που υπεισέρχονται σ' αυτό το ζήτημα είναι τόσο γενικό, που ανάγκασε τους μαθηματικούς να αναθεωρήσουν την καθιερωμένη αντίληψη ότι κάθε συνάρτηση ταυτίζεται με μια αναλυτική έκφραση και να αναζητήσουν γενικότερους ορισμούς. Ο L. Euler, ήδη από το 1755 διατύπωσε ένα

τέτοιο ορισμό, απαλλαγμένο από την άμεση αναφορά στην έννοια της “αναλυτικής έκφρασης”.

“Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες ποσότητες με τέτοιο τρόπο ώστε, όταν οι τελευταίες αλλάζουν συμβαίνει το ίδιο και με τις πρώτες, τότε οι πρώτες ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων. Αυτός ο ορισμός είναι πολύ ευρύς και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο με την οποία μια ποσότητα θα μπορούσε να προσδιοριστεί από άλλες. Αν λοιπόν το x υποδηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το x με οποιοδήποτε τρόπο ή προσδιορίζονται από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις του x”.

Οι νέες αυτές αντιλήψεις οδήγησαν βαθμιαία στην έννοια της συνάρτησης ως αυθαίρετης αντιστοιχίας ανάμεσα στα στοιχεία δυο συνόλων, που δεν ακολουθεί υποχρεωτικά κάποιο “νόμο”. Ο J. Fourier, το 1822, επισήμανε ρητά αυτό το σημείο με την εξής παρατήρηση: “Γενικά, η συνάρτηση f(x) παριστάνει μια διαδοχή τιμών ή τεταγμένων, καθεμιά από τις οποίες είναι αυθαίρετη. Αν δοθεί μια απειρία τιμών στην τετμημένη x, θα υπάρχουν ίσου πλήθους τεταγμένες f(x). Όλες έχουν πραγματικές αριθμητικές τιμές, θετικές ή αρνητικές ή μηδέν. Δεν προϋποθέτουμε ότι αυτές οι τεταγμένες υπόκεινται σ’ ένα κοινό νόμο˙ διαδέχονται η μια την άλλη με οποιοδήποτε τρόπο και καθεμιά από αυτές δίνεται σαν να ήταν μια μοναδική ποσότητα”.

Η έννοια της συνέχειας

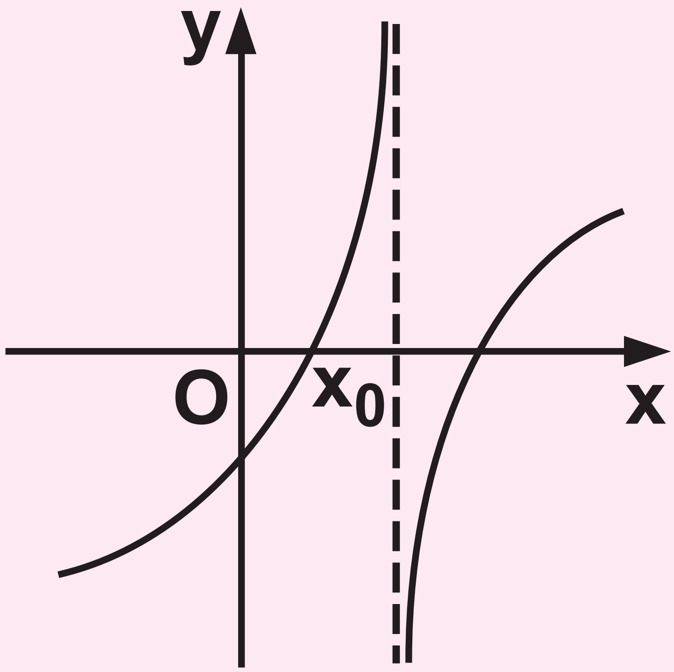
Την περίοδο που η έννοια της συνάρτησης ταυτίζονταν με αυτήν της “αναλυτικής έκφρασης”, υπήρχαν δυο διαφορετικές αντιλήψεις για την έννοια της συνέχειας. Η μία από αυτές, με καθαρά γεωμετρική προέλευση, εξέφραζε την ιδιότητα μιας καμπύλης να μη

παρουσιάζει “διακοπές”˙ η άλλη, με προέλευση κυρίως από τη φυσική, εξέφραζε την ιδιότητα ενός φαινομένου να ακολουθεί τον ίδιο “νόμο”, την ιδιότητα μιας συνάρτησης να διατηρεί την ίδια αναλυτική έκφραση σ’ ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Σ’ αυτήν την τελευταία αντίληψη περί συνέχειας άσκησε έντονη κριτική ο A. L. Cauchy το 1844, σημειώνοντας τα εξής: “Στα έργα των Euler και Lagrange, μια συνάρτηση ονομάζεται συνεχής ή ασυνεχής ανάλογα με το αν οι διαφορετικές τιμές αυτής της συνάρτησης υπόκεινται ή όχι στον ίδιο νόμο, προκύπτουν ή όχι από μια μοναδική εξίσωση.

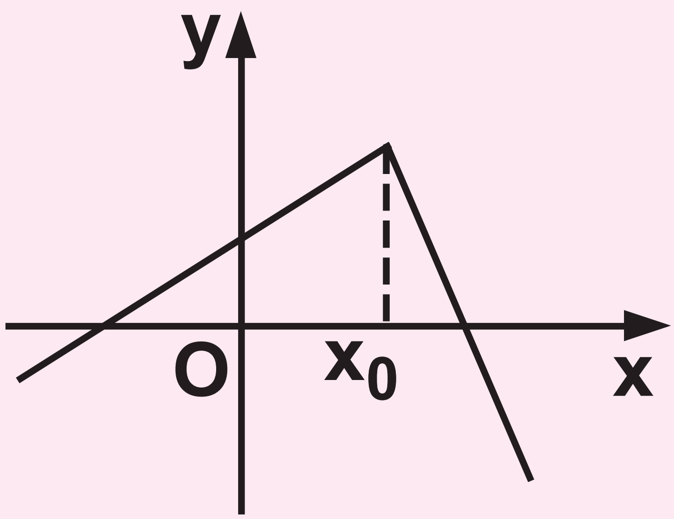
Όμως αυτός ο ορισμός πολύ απέχει από το να θεωρηθεί μαθηματικά ακριβής˙ γιατί αν οι διαφορετικές τιμές μιας συνάρτησης εξαρτώνται από δυο ή περισσότερες διαφορετικές εξισώσεις, τίποτα δεν μας εμποδίζει να μειώσουμε τον αριθμό αυτών των εξισώσεων ή ακόμη και να τις αντικαταστήσουμε από μια απλή εξίσωση, της οποίας η ανάλυση θα μας έδινε όλες τις υπόλοιπες. Επομένως, αν κανείς θεωρήσει τον ορισμό των Euler και Langrange εφαρμόσιμο σε όλα τα είδη των συναρτήσεων, τότε μια απλή αλλαγή του συμβολισμού είναι συχνά αρκετή για να μετασχηματίσει μια συνεχή συνάρτηση σε ασυνεχή και αντίστροφα. Έτσι π.χ., αν το x συμβολίζει μια πραγματική μεταβλητή, τότε η συνάρτηση που ισούται με + x ή – x, ανάλογα με το αν η μεταβλητή x είναι θετική ή αρνητική, πρέπει για το λόγο αυτό να τοποθετηθεί στην κλάση των ασυνεχών συναρτήσεων˙ όμως η ίδια συνάρτηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως συνεχής όταν γραφεί στη μορφή $\sqrt{x^2}$ [1].

---

[1] **Είναι φανερό ότι ο Cauchy χρησιμοποιεί εδώ, χωρίς να την ονομάζει, τη συνάρτηση απόλυτη τιμή.**



Ασυνέχεια στο x_0 λόγω διακοπής της καμπύλης σ' αυτό το σημείο.



Ασυνέχεια στο x_0 λόγω μεταβολής της αναλυτικής έκφρασης σ' αυτό το σημείο

Έτσι, ο χαρακτήρας της συνέχειας των συναρτήσεων, θεωρούμενος από το σημείο όπου οι γεωμέτρες σταμάτησαν για πρώτη φορά, είναι ασαφής και αβέβαιος. Η αβεβαιότητα όμως θα εξαφανιστεί, αν στη θέση του ορισμού του Euler αντικαταστήσουμε αυτόν που έχω δώσει στο κεφάλαιο II του έργου μου "Αλγεβρική ανάλυση" ...".

Ο ορισμός, στον οποίο αναφέρεται εδώ ο Cauchy, αποτελεί ουσιαστικά την πρώτη απόπειρα μελέτης της έννοιας της συνέχειας με λογική αυστηρότητα. Αποσυνδέοντας αυτήν την έννοια από κάθε γεωμετρική εποπτεία

και εξάρτηση από την έννοια της “αναλυτικής έκφρασης”, τη μετασχημάτισε σε μια καθαρά αριθμητική ιδιότητα των συναρτήσεων, που μπορεί να γίνει αντικείμενο λογισμού. Ο ορισμός αυτός του Cauchy, που δόθηκε το 1821, έχει ως εξής: (έναν παρόμοιο ορισμό είχε δώσει και ο B. Bolzano το 1817).

“Έστω f(x) μια συνάρτηση της μεταβλητής x και ας υποθέσουμε ότι για κάθε τιμή του x σ’ ένα δοσμένο διάστημα η συνάρτηση αυτή έχει πάντοτε μια μοναδική και πεπερασμένη τιμή. Αν δώσουμε στην μεταβλητή x μια απειροελάχιστη αύξηση α, η συνάρτηση θα αυξηθεί κατά τη διαφορά $f(x + α) – f(x)$, η οποία εξαρτάται από τη νέα μεταβλητή α και την τιμή που είχε το x. Σ’ αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $f(x)$ θα ονομάζεται **συνεχής** στο διάστημα της μεταβλητής x, αν για κάθε τιμή του x σ’ αυτό το διάστημα, η απόλυτη τιμή της διαφοράς $f(x + α) – f(x)$ μικραίνει επ’ άπειρον μαζί μ’ αυτήν του α. Με άλλα λόγια, η $f(x)$ θα παραμένει συνεχής ως προς x, αν μια απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει πάντοτε μια απειροελάχιστη αύξηση της ίδιας της συνάρτησης”.

Η έννοια του ορίου

Η έννοια της συνέχειας καθώς και ορισμένες άλλες βασικές έννοιες της ανάλυσης που θα γνωρίσουμε στα επόμενα κεφάλαια (όπως π.χ. η παράγωγος και το ολοκλήρωμα) περιείχαν, στα πρώτα στάδια της εξέλιξής τους, ορισμένες ασάφειες, που οφείλονταν κυρίως στην αδυναμία των μαθηματικών να διαπραγματευθούν με λογική αυστηρότητα την έννοια του απείρως μικρού και του απείρως μεγάλου. Αυτή η αδυναμία οδηγούσε πολλούς να αμφισβητούν τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζονταν το οικοδόμημα της μαθηματικής ανάλυσης και να συνδέουν τα εντυπωσιακά αποτελέσματά της με ορισμένες μεταφυσικές ερμηνείες.

Οι μαθηματικοί προσπάθησαν να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες εισάγοντας την ιδέα του ορίου, με την οποία, αρχικά, εκφράζονταν η δυνατότητα μιας μεταβαλλόμενης ποσότητας να προσεγγίζει επ' άπειρον μια σταθερή ποσότητα χωρίς στην πραγματικότητα να τη φτάνει ποτέ. Ο d' Alembert όρισε το 1765 αυτήν την έννοια στην "Εγκυκλοπαίδεια" του Diderot ως εξής:

"Ένα μέγεθος ονομάζεται **όριο**

ενός άλλου όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίζει το πρώτο σε μια απόσταση οσοδήποτε μικρή, αν και ένα μέγεθος δεν μπορεί να ξεπερνά ποτέ το μέγεθος που προσεγγίζει˙ έτσι ώστε η διαφορά μιας τέτοιας ποσότητας από το όριό της να είναι εντελώς αμελητέα”.

Σύμφωνα λοιπόν μ’ αυτόν τον ορισμό, που περικλείει την έννοια της κίνησης ως μια διαδικασία προσέγγισης, ο αριθμός 2 είναι το όριο της ακολουθίας 1,9 1,99 1,999 1,9999 …, αλλά όχι όριο ακολουθίας 1,9 1,99 2 2 … (γιατί αυτή “φτάνει” το 2), ούτε όριο της ακολουθίας 1,9 2,01

1,9999 2,0001 ... (γιατί αυτή ξεπερνά το 2). Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν την έννοια αυτή του ορίου φαίνεται χαρακτηριστικά στο επόμενο παράδειγμα, στο οποίο ο S.F. Lacroix αποδεικνύει το 1810 ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\alpha x}{x+\alpha} = \alpha$:

“Έστω ότι δίνεται η συνάρτηση $\frac{\alpha x}{x+\alpha}$, στην οποία υποθέτουμε ότι το x αυξάνεται θετικά χωρίς τέλος. Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το x, βρίσκουμε $\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{x}}$, ένα αποτέλεσμα που δείχνει καθαρά ότι η συνάρτηση θα παραμένει πάντοτε μικρότερη από το α αλλά θα προσεγγίζει συνέχεια αυτήν την τιμή, αφού το μέρος $\frac{\alpha}{x}$ του παρονομαστή μειώνεται όλο και περισσότερο και μπορεί να μειωθεί όσο θέλουμε. Η διαφορά ανάμεσα στο δοσμένο κλάσμα και την τιμή α εκφράζεται ως

$$\alpha - \frac{\alpha x}{x+\alpha} = \frac{\alpha^2}{x+\alpha}$$

και επομένως γίνεται ολοένα και πιο μικρή, όσο το x γίνεται μεγαλύτερο, και μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα, οσοδήποτε μικρή. Συνεπώς, το δοσμένο κλάσμα μπορεί να προσεγγίζει το α όσο κοντά θέλουμε: άρα το α είναι το όριο της συνάρτησης $\frac{\alpha x}{x+\alpha}$ ως προς την αόριστη αύξηση του x”.

Για να τυποποιήσουμε αυτήν την μακροσκελή διαδικασία, οι μαθηματικοί προσπάθησαν να αποσυνδέσουν την έννοια του ορίου από την έννοια της κίνησης και να την ορίσουν με καθαρά αριθμητικούς όρους, έτσι ώστε να γίνει ένα αντικείμενο μαθηματικού λογισμού. Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας υπήρξε ο σημερινός “στατικός” ορισμός με τη βοήθεια των ανισοτήτων και της απόλυσης τιμής, που διατυπώθηκε από τον

Weierstrass στα μέσα του 19ου αιώνα. Με αυτόν τον ορισμό, η έννοια του ορίου απογυμνώθηκε από κάθε στοιχείο εποπτείας αλλά έγινε έτσι δυνατό να αποδειχθούν με λογική αυστηρότητα οι ιδιότητες των ορίων και να τυποποιηθεί η διαδικασία υπολογισμού τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο:

Όριο - συνέχεια συνάρτησης Σελ.